فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران / شماره ۱۲/ پاییز ۱۳۸۱

نظریه کاتاستروف[1] و کاربرد آن در اقتصاد

دکتر حسین عباسی نژاد*

شاپور محمدی**

تاریخ ارسال: ۸۱/۷/۷ تاریخ پذیرش: ۸۱/۱۰/۱۸

چکیده

برخی از پدیده‌های اقتصادی و اجتماعی تغییرات ناگهانی از خود نشان می‌دهند که با ناپیوستگی و تغییرات کیفی در سیستم همراه است. نظریه کاتاستروف، روش مناسبی را برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی که با تغییرات ناگهانی همراه هستند، ارایه می‌کند. از جمله زمینه‌های بالقوه کاربرد نظریه کاتاستروف، مدل‌های رشد غیرخطی، تغییرات تکنولوژیک، مربوط به فن آوری، تغییرات نهادی، منحنی فیلیپس، بازار سهام و رفتار مصرف کننده است.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های غیرخطی، نظریه کاتاستروف، پایداری ساختاری، تغییرات ناگهانی

---

۱. واژه‌های "جهش ناگهانی"، "غیرمنتظره" و "فاجعه" به عنوان معادل فارسی "کاتاستروف" در برخی مقالات فارسی دیده می شود که چندان گویا نیستند، بنابراین، از خود کلمه استفاده شده است.

*دانشیار دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران Email:habasi@ut.ac.ir

**دانشجوی دوره دکترای اقتصاددانشگاه تهران Email:shmohamd@ut.ac.ir

۱. مقدمه

نظریه کاتاستروف را رنه تام[1] ریاضیدان فرانسوی ارایه کرد و گسترش کاربردی آن وامدار تلاشهای زیمن[2] است. تام معتقد است که نظریه کاتاستروف، یک نظریه علمی نیست بلکه زبانی برای بیان مسائل علمی است. اما، ریاضیدانان معتقدند که نظریه کاتاستروف، بر بدنه قوی بخشی از ریاضیات که به وسیله تام و دیگران توسعه یافت، استوار شده است. این نظریه، به دنبال بررسی چگونگی تغییر جوابهای سیستم معادلات در ازای تغییر پارامترهای سیستم است. وقتی پارامترها تغییر می‌کنند، ممکن است جوابها از یک مقدار به مقدار دیگر جهش کند، که این جهش، کاتاستروف نامیده می‌شود.

نظریه پردازان رویدادهای غیرمنتظره (کاتاستروف)، برخی پدیده‌های ناپیوسته مانند سقوط بازار سهام یا حمله ناگهانی سگی که هم ترسیده و هم عصبانی است را در حیطه کاربردهای این نظریه قرار می‌دهند. نظریه کاتاستروف، در رشته‌های مختلف از جمله فیزیک، بیولوژی، جامعه شناسی، علوم سیاسی، اقتصاد، زبان شناسی و روان شناسی مورد استفاده قرار گرفته است.

بسیاری از پدیده‌های طبیعی از جمله، قوانین جاذبه و حرکت نیوتن، نظریه الکترومغناطیسی، قانون نسبیت عمومی با معادلات دیفرانسیل قابل بیان هستند. با وجود این، معادلات دیفرانسیل از محدودیت ذاتی برخوردار است زیرا، پدیده‌هایی با معادلات دیفرانسیل قابل بررسی هستند که به صورت هموار و پیوسته تغییر کنند. در حالی که در دنیای واقع، پدیده‌های زیادی وجود دارند که دستخوش تغییرات ناگهانی و ناپیوسته می‌شوند.

نظریه رویدادهای غیر منتظره (کاتاستروف) از توپولوژی مشتق شده است و مسئله پیش روی آن، بررسی انواع تعادل‌ها و نحوه انتقال از یک تعادل به تعادل دیگر سیستم است. به بیان دیگر، تغییر ماهیت توپولوژیک یک سیستم وقتی که اختلال[3] اندکی در سیستم ایجاد می‌شود، موضوع مورد بررسی در نظریه کاتاستروف است.

مطالعات متعددی در زمینه کاربرد نظریه کاتاستروف انجام گرفته است که از میان آنها می‌توان به زیمن (Zeeman 1976 ،1974)، کاب (Cobb 1998)، گاستلو (Gustello 1982)، واریان (Varian 1981)، پو (Puu 1991)، لاک وود (Lockwood 1993)، بالاسکو (Balasko

1. Rene Thom
2. E.C.Zeeman
3. Perturbation

(1978 و رومل (Rummel 2000)، اشاره کرد. زمینه کاربرد این نظریات متنوع بوده و از علوم کامپیوتر تا روان‌شناسی را دربرمی گیرد.

در قسمت بعد، به زمینه‌های ریاضی نظریه کاتاستروف خواهیم پرداخت که شامل مباحث اجمالی از توپولوژی دیفرانسیل است. قسمت سوم، شامل مثالهایی از نظریه رویدادهای کاتاستروف و تعریف نسبتاً صریح از آن است. همچنین، زمینه‌های بالقوه کاربرد نظریه کاتاستروف مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش پایانی به نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادهایی برای مطالعات آتی می‌پردازد.

۲. مفاهیم و زمینه‌های نظری

در مطالعه سیستم‌های دینامیکی، بررسی وجود یکتایی و پایداری تعادل‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یک نوع پایداری به نام پایداری ساختاری شناخته شده است که به مفهوم پایداری خواص توپولوژیک یک سیستم دینامیکی در مقابل برخی تغییرات پارامتری است. این مفهوم، با مفاهیمی مانند ترنسور سالیتی و قابلیت بسط با سری‌های تیلور در ارتباط است که به آنها می‌پردازیم.

۲-۱. پایداری ساختاری[1]

فرض کنید $F: X \rightarrow R^n$ یک میدان برداری روی فضای وضعیت X را تعریف کند، در این صورت، اگر شوک‌های کوچک وارد بر سیستم، نتایج ساختار توپولوژیک میدان برداری $\overset{\circ}{x} = f(x)$ را تغییر ندهد، این سیستم پایداری ساختاری دارد.

برای مثال فرض کنید $f(x) = Ax, X = R^2$ که در آن، A ماتریس ۲ × ۲ نا تکین است. در این صورت، مبدأ تعادل یکتای سیستم است و ماهیت توپولوژیک شار[2] حول مبدأ به وسیله مقادیر ویژه ماتریس A معین می‌شود.

برای بیشتر انتخاب‌های A سیستم تعیین شده به وسیله $\overset{\circ}{x} = A(x)$ زمانی که تغییرات کوچک در A علامت مقادیر ویژه را تغییر ندهد به طور ساختاری پایدار خواهد بود.

یک استثنا حالتی است که قسمت حقیقی هر دو ریشه مساوی صفر است. در این صورت، شارهای سیستم شامل مدارهایی حول مبدأ است که هر تغییر کوچکA مقادیر ویژه غیر صفر را نتیجه خواهد

1. Structural Stabilities
2. Flow

داد و شارها را از شکل مدار بسته خارج خواهد ساخت.وقتی ساختار توپولوژیک سیستم تغییر فاحش از خود نشان دهد، ناپایداری ساختاری داریم.

اگر، $\overset{\circ}{x} = f(x)$ میدان برداری و D^n، فضای وضعیت باشد، با فرض اینکه Ω فضای تمامی توابع مشتق پذیر پیوسته از D^n به R^n باشد و Ω، اندازه استاندارد C^1 را داشته باشد (دو تابع به هم نزدیک هستند اگر، مقادیر و مشتقاتشان به هم نزدیک باشد). می‌توان مفهوم اختلال را به عنوان یک انتخاب از هر تابع در ε - ball حول f تعریف کرد.

اگر بخواهیم ساختار توپولوژیک $\overset{\circ}{x} = f(x)$ نسبت به اغتشاشات کوچک F ناوردا[1] باشد، در این صورت، باید آنها خصوصیات کیفی یکسان داشته باشند.

مفهوم مرتبط با این بحث هم ارزی توپولوژیکی[2] است. به بیان غیر دقیق، شار دو سیستم دینامیکی روی D^n به لحاظ توپولوژیکی معادل هستند اگر یک همسان ریختی[3]، $h : D^n \rightarrow D^n$ که مدارهای یک شار را به دیگری می‌برد وجود داشته باشد. همسان ریختی را می‌توان با تغییر پیوسته مختصات نیز بیان کرد. بنابراین، هم ارزی توپولوژیکی به مفهوم این است که با تغییر مداوم مختصات می توان از شاری به شار دیگر رسید.

یک سیستم دینامیکی $\overset{\circ}{x} = f(x)$ روی D^n به لحاظ ساختاری پایدار است. اگر، همسایگی‌هایی برای f وجود داشته باشد، که برای هر تابع g در آن همسایگی شار القاء شده به وسیله $\overset{\circ}{x} = g(x)$ به لحاظ توپولوژیکی معادل شار f باشد. به بیان تلویحی، یک سیستم دینامیکی به طور ساختاری پایدار است اگر اغتشاشات کوچک در تابع f ماهیت کیفی شار تغییر ندهد.

۲-۲. لم مورس[4]

فرض کنید $f : R^n \rightarrow R$ ، برای برخی $X_{\circ} \in R^n$ دارای مشتق مرتبه اول مساوی صفرباشد ($Df_1 (x_{\circ}) = 0$) ، اما ماتریس هشین آن در $x_{\circ}$ ناتبهگون[5] باشد (یعنی دترمینان هشین در نقطه $x_{\circ}$ غیر صفر است). در این صورت، یک تغییر موضعی هموار مختصات‌حول $x_{\circ}$

---

1. Invariant
2. Topologicol Equivalance
3. Homeomorphism
4. Morse Lemma
5. Nondegenerate

به $\left(\mathrm{y}_1(x),\ldots\mathrm{y}_\mathrm{n}(x)\right)$ وجود دارد به طوری که $y_1(x_\circ) = \ldots y_n(x_\circ) = 0$ است و f شکل دقیق ذیل را دارد.

$$f(x_\circ)+\frac{1}{2}\sum_{ij}\mathrm{H}_{\mathrm{ij}}(x_\circ)y_iy_j$$

در نقاطی ممکن است، هشین دترمینانی برابر با صفر داشته باشد که این نقاط، غیر مورس[1] نامیده می‌شوند. همسایگی‌های چنین نقاطی نیاز به بسط‌های تیلور مرتبه سه یا بالاتر دارند.

یک تابع $f : R^n \to R$ تابع مورس نامیده می‌شود اگر، در هر نقطه‌ای که مشتق اول صفر است، هشین نابتهگون باشد. توابع مورس ویژگی‌های ذیل را دارد:

الف) به طور موضعی ساده[2] هستند، به طوری که به شکل تابع خطی یا توابع توان درجه دوم قابل بیان هستند (لم مورس).

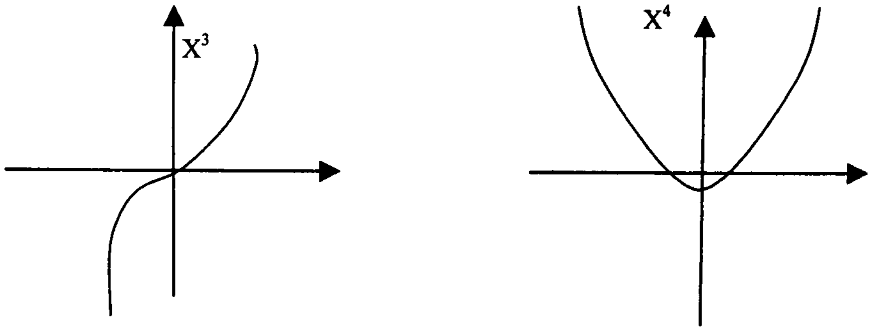
ب) به لحاظ ساختاری پایدارند: یعنی، یک اختلال به اندازه کافی کوچک یک تابع مورس f همیشه می‌تواند به همان شکل اولیه (اصلی) f با تغییر مختصات و مقیاس بیان شود. برای مثال اضافه کردن x به x^2+y^2 تابع $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}$ را نتیجه می‌دهد که می‌تواند به صورت u^2+v^2 با قرار دادن $X+\frac{1}{2}=u$ و $\mathrm{y}=\mathrm{v}$ و قراردادن مبدأ R در $-\frac{1}{4}$ بیان شود. یک تعدیل مشابه می‌تواند با $x^2+y^2+g(x,y)$ که در آن g هر تابعی از تمام مشتقاتش است که به اندازه کافی کوچک هستند، بیان شود. این خاصیت، داشتن یک حداقل مطلق (یا موضعی) علی رغم اختلالات حفظ می‌شود. در مقابل توابع نمودار (۱) پایداری ساختاری ندارند، زیرا یک اختلال کوچک در آنها با یک ε مثبت موجب رسیدن به توابع ذیل خواهد شد که ماکزیمم و مینیمم آنها متفاوت است و با تغییر مختصات از بین نمی‌رود.

ج) توابع مورس همیشه وجوددارند. به عبارت روشن‌تر، همیشه می‌توان توابع غیرمورس را به مورس تبدیل کرد.

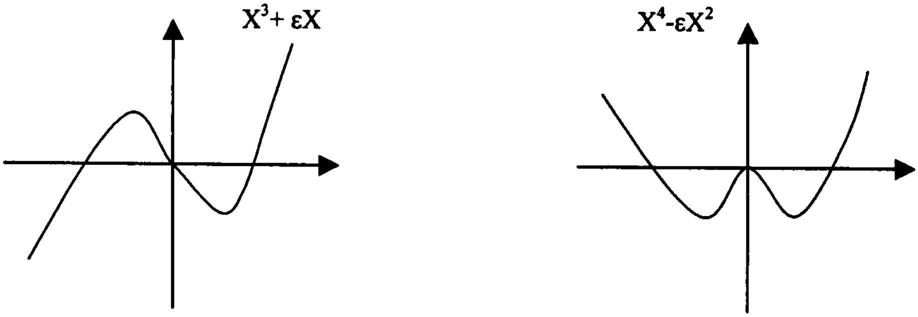
---

1. Non- Morse
2. Simple

نمودار-۱. توابع پایدار ساختاری



نمودار-۲. توابع ناپایدار ساختاری



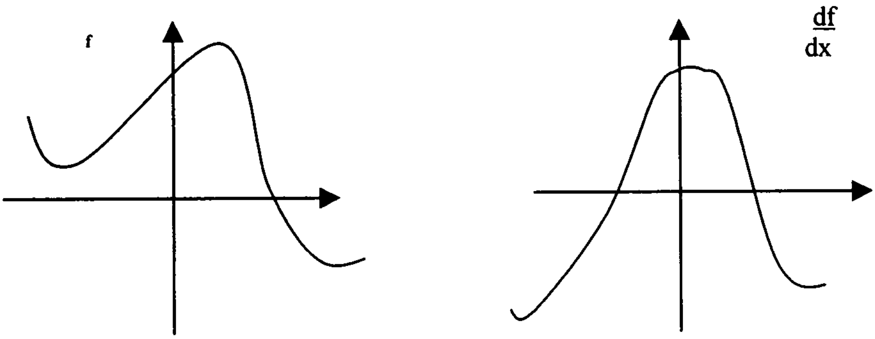
تقریب مرتبه اول نقاط غیر مورس را می‌توان از معادله $\begin{bmatrix} H & W \\ Z^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g \\ \det H \end{bmatrix}$ که در آن g گرادیان، H ماتریس هشین، $w = \partial_t g$، $Z = \nabla \det H$ و $C = \partial_t \det H$ است که در نقطه بحرانی موردنظر (x_0, t_0) است.

۲-۳. کاربرد ترنسور سالیتی

یک تابع مانند $f : R^n \rightarrow R$ تابع مورس است اگر فقط نقاط بحرانی زینی، ماکزیمم و مینیمم داشته باشد. در کاربردهای کاتاستروف اغلب ضروری است که انتخاب‌هایی از f را که در میان خانواده‌ای از توابع تغییر می‌کند در نظر بگیریم. از نظر ریاضی توجه به این نکته مهم است که ممکن است توابع به تنهایی نقاط غیر مورس داشته و غیر موضعی[1] باشند، اما، آنها به عنوان یک خانواده موضعی[2] هستند. موضعی بودن تابع مورس نتیجه ترنسور سالیتی است. تابع $f : R \rightarrow R$ مفروض است و نمودار f و $\frac{df}{dx}$ در ذیل رسم شده است.

مشتق f ، $\frac{df}{dx}$ بر خط صفر، ترنسور سال است. زیرا، هیچ خطی که بر هر دو (خط صفر و منحنی صفر) عمود باشد، نمی‌توان یافت.

نمودار-۳. تابع ترنسورسال ومشتق مرتبه اول



همان طور که ملاحظه می‌شود $\frac{df}{dx}$ با شیب غیر صفر از خط صفر می‌گذرد:

$$\frac{df}{dx}\,|x_\circ = 0, \frac{d^2f}{dx^2}|x_\circ = 0$$

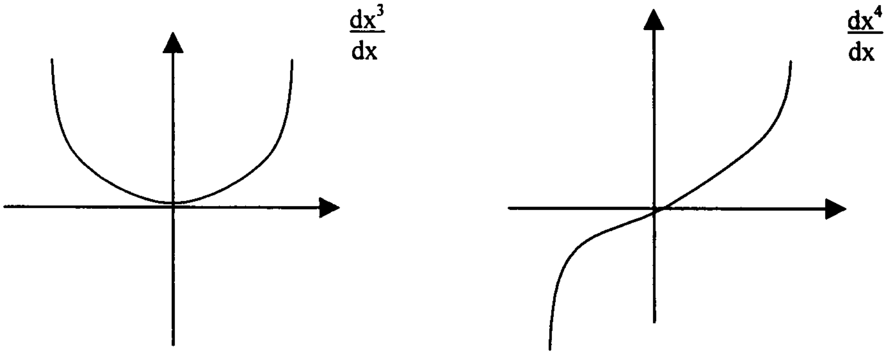
بنابراین، در هیچ نقطه‌ای هر دو مشتق همزمان صفر نیستند و تابع بر حسب سری‌های تیلور قابل بیان است.

---

1. Atypical
2. Typical

توابع ترنسورسال پایدار هم هستند. زیرا، یک لرزش کوچک در تابع شکل کلی آن را تغییر نخواهد داد. توابعی که پایداری ساختاری دارند ویژگی‌های کیفی خودراحفظ می‌کنند. نمودارهای یادشده نمونه‌ای از این توابع با پایداری ساختاری هستند. توابع $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ از نظر ساختاری پایدار نیستند زیرا، مشتقات آنها بر خط صفر ترنسورسال نیستند (نمودارهای زیر را ملاحظه کنید).

نمودار-۴. تابع غیر ترنسورسال ومشتق مرتبه اول



۳. نظریه کاتاستروف و کاربردها

تغییر از یک تعادل به تعادل دیگر که به وسیله تغییر پارامترهای یک سیستم دینامیکی اتفاق می‌افتد در دنیای واقعی نیز برای برخی از پدیده‌ها رخ می دهد. جهش ناگهانی از یک سطح رفتاری برای انسان‌ها و حیوانات، گذر از یک اقتصاد معیشتی به اقتصاد صنعتی، گذر از یک رژیم سیاسی به رژیم دیگر، تغییر موضع در مباحثه و مجادله، از انواع این تغییرات هستند. ذکر مثالی که زیمن در مقاله خود در امریکن ساینتیفیک[1] به سال ۱۹۷۵ ذکر کرده است، می‌تواند به توضیح بیشتر مطلب کمک کند. رفتار سگ با دو متغیر کنترل ترس و خشم قابل بیان است. اگر، یک سگ بیش از حد ترسانده شود، فرار خواهد کرد و اگر بیش از حد خشمگین شود، حمله خواهد کرد. اما، حالتی وجود دارد که میزان ترس و خشم در سگ تمایل به برابری دارد و سگ در حالت تعارض قرار گرفته است. یک افزایش اندک در

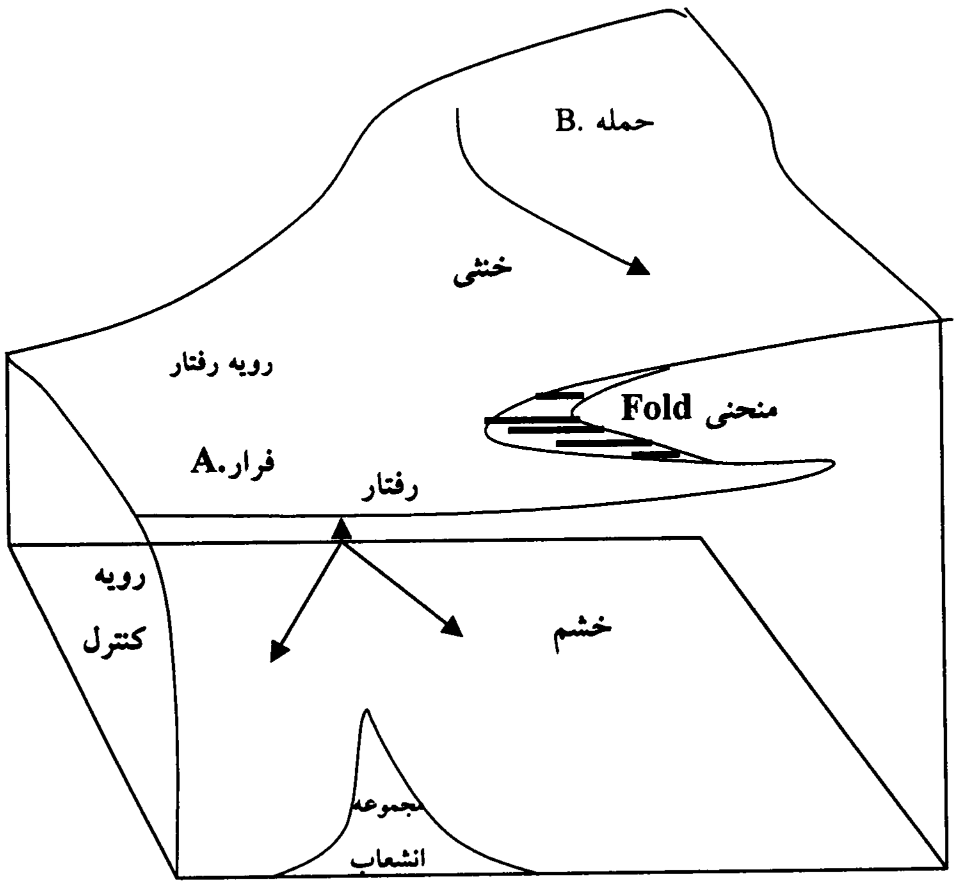
1. American Scientific

ترس سگ موجب فرار و یک افزایش کوچک در خشم سگ موجب حمله خواهد شد. این، همان ناپیوستگی و تغییر ناگهانی رفتار است. اگر یک تعادل، حمله و تعادل دیگر فرار باشد، انتخاب یکی از این دو تعادل به تغییر اندک پارامترهای کنترل بستگی دارد. این تغییر،متناظر با تغییرات ویژگی های توپولوژیک سیستم های دینامیک است. نمودار (۵) رفتار سگ را نشان می دهد. سه رویه رفتاری وجود دارد.

۱- رویه پایین (فرار) ۲- رویه بالا (حمله) و ۳- رویه میانی (رویه ناپایدار).

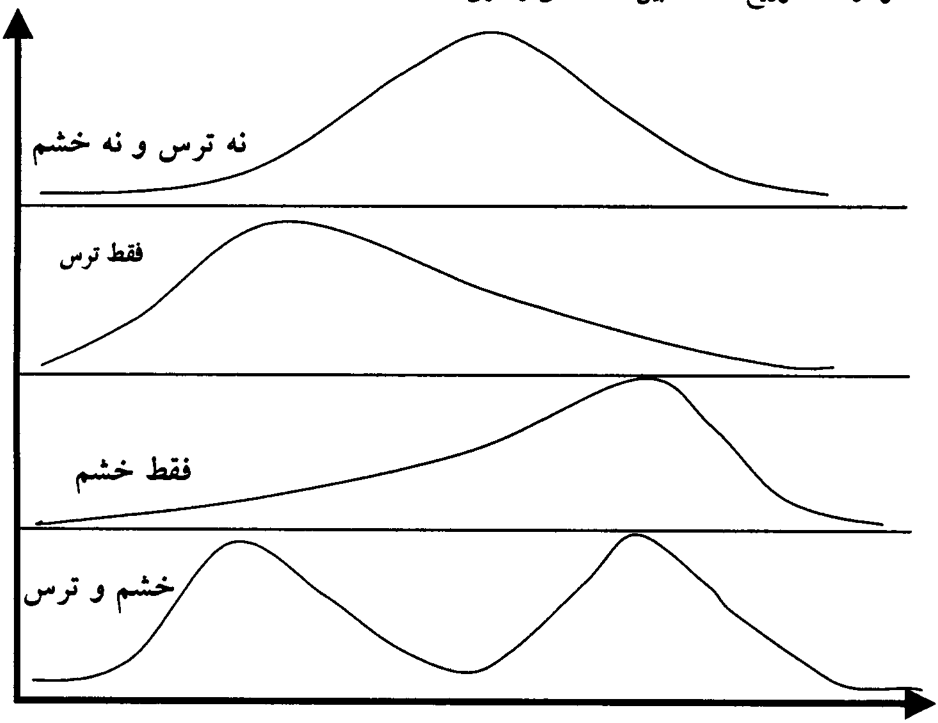
رویه میانی کم احتمال‌ترین رفتار را نشان می‌دهد در حالی‌که رویه‌های دیگر هر دو محتمل هستند و به‌عبارت دقیق‌تر توزیع دومدی[1] است.

نمودار-۵. نمودار مدل کاتاستروف کاسپ برای رفتار یک سگ



1. Bimodal

نمودار -۶ . توزیع احتمال بین تعادل‌های رفتاری

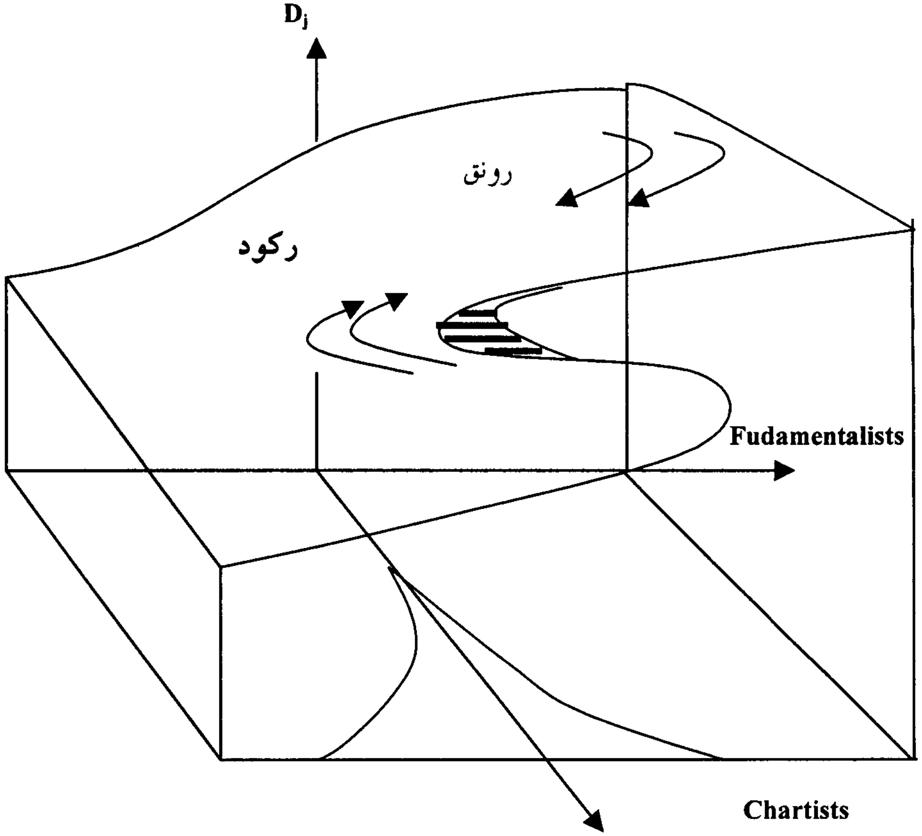


مثال دیگر بازار سهام است که زیمن در مجله اقتصاد ریاضی ارایه کرده است. در این مدل، زیمن دو حالت مختلف بازار سهام رونق[1] و رکود[2] را با تغییرات شاخص بازار سهام (به عنوان مثال شاخص داوجونز) مشخص می‌کند. وقتی $\frac{d(Dj)}{dt} > 0$ است، بازار در حالت رونق قرارداد و وقتی $\frac{d(Dj)}{dt} < 0$ باشد، بازار در حالت رکود است. متغییرهای کنترل، اضافه تقاضای خریداران فاندامنتالیست[3] و خریداران چارتیست[4] هستند. اگر، چارتیست‌ها بر بازار تسلط پیدا کنند (تعداد

1. Bulish
2. Bearish
2. Fundamentalist
3. Chartist

خریداران سهام که تفکر چارتیستی دارند، بیشتر از گروه دیگر شود)، رفتار بازار کاتاستروف خواهد بود (نمودار ذیل). در غیر این‌صورت، رفتار بازار با یک رویه هموار قابل توضیح است.

نمودار-۷. مدل کاسپ برای بازار سهام



وقتی تعداد چارتیست‌ها بیشتر می‌شود و تقاضای مؤثر دارند، از رویه پایین به بالا حرکت می‌کنیم و این حرکت ناگهانی است. در حالی‌که در مبدأ که تعداد چارتیست‌ها صفر است، این تغییر ناگهانی وجود ندارد و یک منحنی هموار تقاضای فاندامنتالیست‌ها را منعکس می‌کند.

به عنوان دومین مثال تابع تولید غیرخطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$Q = \alpha\left[\beta(K+L)^2 - K^3 - L^3\right]$$

نقطه حداکثر تابع تولید فوق $K = L = \frac{4}{3}\beta$ است. معادله انتقال از بازده صعودی به نزولی در طول منحنی ذیل اتفاق می افتد:

$$K^3 + L^3 = \frac{\beta}{2}(K+L)^2$$

گذر از یک وضعیت مانند بازده صعودی به مقیاس به وضعیت دیگر مانند بازده نزولی به مقیاس می تواند در اثر رشد سرمایه و رشد نیروی کار محقق شود، که به معنی تغییر متغیرهای کنترل (رشد سرمایه و نیروی کار) به زبان نظریه کاتاستروف است. به عبارت روش تر، در مدل های رشد غیرخطی نظریه کاتاستروف می تواند گذر اقتصاد از وضعیت با بازده صعودی به مقیاس را به وضعیت بازده نزولی به مقیاس تبیین کند.

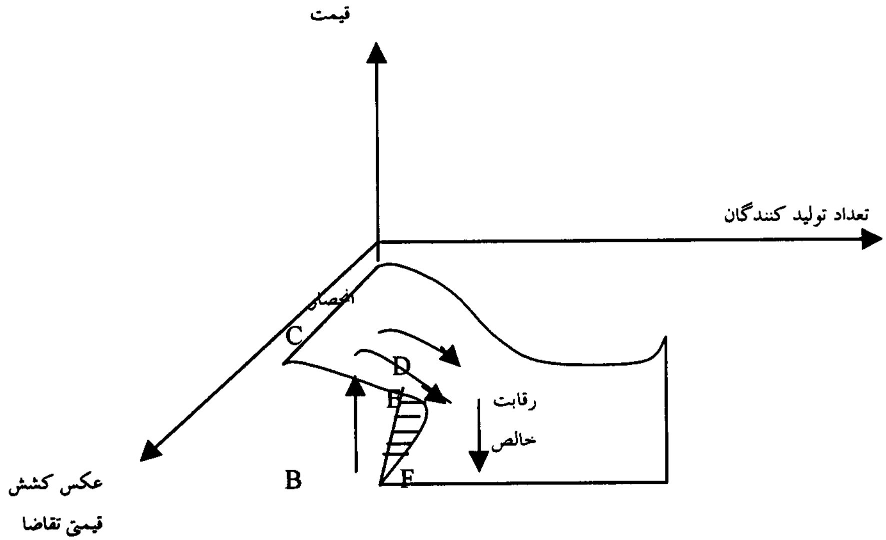
گذر از یک تعادل به تعادل دیگر در نظریه رشد فقط به علت تغییر موجودی سرمایه و نیروی کار نیست، بلکه می تواند از طریق تغییر پارامترهای α و β در تابع تولید نیز روی دهد که خود معلول عواملی مانند تغییرات بهره وری، مقیاس بهینه فعالیت و دوام کالاهای سرمایه ای است. در این حالت، وقتی تعادلی به وجود می آید تغییر پارامتر باعث انتقال ناگهانی و سریع (کاتاستروفی) و انتقال به یک تعادل جدید می شود. این انتقال در (Puu, 1991, p.56) با لغت evaporate برای بیان سرعت انتقال از یک تعادل به تعادل دیگر بیان شده است (مباحث کامل تر نیاز به فضای بیشتری دارد که خارج از حوصله این مقاله است. ر. ک. Puu,1991).

کاربرد دیگر نظریه کاتاستروف در اقتصاد با عنوان تغییرات ناپیوسته در ساختار بازار شناخته شده است. (Rosser 1991) . قدرت گرفتن اوپک موجب حرکت از وضعیت رقابتی به وضعیت انحصاری شد. بنابراین، یک تغییر در ساختار بازار ایجاد شد. این تغییر ساختار به وسیله دو متغیر کنترل تعداد فروشندگان و کشش قیمتی تقاضا قابل بیان است. متغیر قیمت نفت به عنوان متغیر وضعیت[1] درنظر گرفته شده است.

همان گونه که در نمودار (۸) ملاحظه می شود، جهش از نقطه B به C در سال ۱۹۷۳ به دلیل کاهش رقابت اتفاق افتاد.کاهش های بعدی قیمت نفت به دلیل ورود تولید کنندگان دیگر (دریای شمال،

1. State Variable

نمودار-۸ رفتار اعضای اوپک و قیمت نفت



آلاسکا و غیره) بود که این خود موجب گرایش به سمت D می‌شد. زیرا، در بلند مدت کشش قیمت تقاضا بیشتر است و تعداد تولید کنندگان نیز افزایش یافته بود. با وجود این، در سال ۱۹۸۶ به دلیل افزایش تولید عربستان افت شدید قیمت اتفاق افتاد و موجب انتقال ازنقطه C به E و از نقطه E به F به جای انتقال به نقطه D شد. این بخش از واقعیات با نظریه کاتاستروف همخوانی ندارد. اما، در شرایط عادی – وقتی که تعداد تولیدکنندگان و کشش قیمتی، بازار را هدایت کنند – نظریه کاتاستروف قابل استفاده خواهد بود.

با توجه به مقدمات ذکر شده می‌توان نظریه کاتاستروف را به شرح ذیل بیان کرد.

سیستم دینامیکی ذیل را در نظر بگیرید $x^* = f(x,a), f: X \times A \rightarrow R^n$ که در آن، سیستم به وسیله پارامترهایی مانند $a = (a_1,........a_n)$ پارامتری شده است. حال، فرض کنید که a به صورت

آرام طی زمان تغییر کند. بیشتر اوقات این تغییرات زمانی کوچک منجر به تغییرات اساسی در ماهیت کیفی سیستم دینامیکی نخواهد شد. با وجود این گاهگاهی تغییرات ساختاری خواهیم داشت.

برای مثال، یک سیستم روی R^1 را در نظر بگیرید. $x^* = x^2 + a$

اگر a مثبت باشد، تعادلی برای سیستم وجود ندارد. اگر a صفر باشد، یک تعادل $x^* = 0$ وجود دارد و اگر a منفی باشد، دو تعادل $x_2^* = a^{\frac{1}{2}}$ و $x_1^* = -a^{\frac{1}{2}}$ دست یافتنی است.

وقتی a از نقطه صفر عبور می‌کند، ماهیت توپولوژیک سیستم تغییر اساسی می کند که در این صورت، می‌گوییم صفر یک کاتاستروف برای سیستم $x^\circ = x^2 + a$ است.

فرض کنید $V : R^n \times R^2 \rightarrow R$ یک تابع پتانسیل برای سیستم گرادیان باشد که در آن R^n فضای‌وضعیت سیستم و R^2 فضای پارامتر است. در این صورت تعادل سیستم $x^\circ = D_x V(x,a)$ نقاط تکین[1] تابع $V(x, a)$ است. به عبارت دیگر، اگر $D_x V(x,a)$ صفر شود، x^* یک تعادل است. در مثال اخیر

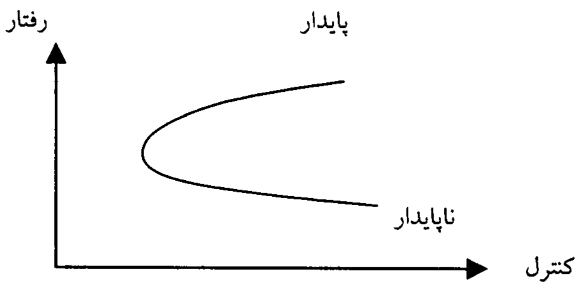
$$V(x,a) = \frac{x^3}{3} + ax$$

و

$$D_x V(x,a) = x^2 + a$$

این ساده‌ترین شکل مدل‌های کاتاستروف فولد[2] است. اگر $r \leq 4$ باشد (بعد فضای پارامتر) فقط هفت نوع مجزا از تکین‌های پایدار وجود دارد. این همان قضیه طبقه‌بندی تام است.

نمودار-۹. منحنی فولد



1. Singularities
2. Fold

انواع معادلات کاتاستروف به صورت جدول ذیل قابل نمایش است.

جدول-۱. انواع معادلات کاتاستروف

	کاتاستروف	ابعاد کنترل	ابعاد رفتار	تابع
کاسپوئیدها	Fold فولد	۱	۱	$u_1^3 + t_1 u_1$
	Cusp کاسپ	۲	۱	$\pm(u_1^4 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1)$
	Swallowtail دم‌پرستو	۳	۱	$(u_1^5 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1)$
	butterfly	۴	۱	$\pm(u_1^6 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1)$
	wigwam	۵	۱	$u_1^7 + t_5 u_1^5 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1$
امبیلیک‌ها	elliptic	۳	۲	$u_1^2 + u_2 - u_2^3 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1$
	Hyperbolic	۳	۲	$u_1^2 u_2 + u_2^3 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1$
	Parabolic	۴	۲	$\pm(u_1^2 u_2 + u_2^4 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1)$
	Second elliptic	۵	۲	$u_1^2 u_2 - u_2^5 + t_5 u_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1$
	Second hyperbolic	۵	۲	$u_1^2 u_2 + u_2^5 + t_5 u_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1$
	Symbolic	۵	۲	$\pm(u_1^3 + u_2^4 + t_5 u_1^2 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1 u_2 + t_2 u_2 + t_1 u_1)$

منبع: Poston & Stewart 1976، ص ۷۴

مهمترین و کاربردی‌ترین نوع معادلات کاتاستروف، نوع کاسپ است که مشخصات آن عبارتند از:

۱. دومدی بودن قسمتی از دامنه

۲. جهش ناگهانی از یک مد به مد دیگر

۳. تأخیر داشتن[1]

۴. دسترس ناپذیر بودن رویه میانی

۵. واگرایی: یک تغییر کوچک ممکن است یک تغییر بزرگ در رفتار را موجب شود.

اگر اقتصاد بتواند با هر دو سیستم کار کند (دو سطح رفتاری)، مدل‌سازی گذر از اقتصاد با برنامه‌ریزی متمرکز به اقتصاد بازار از طریق نظریه کاسپ ممکن است. در حالی که اگر روی کار آمدن یک سیستم، مستلزم از میان رفتن سیستم دیگر باشد، در این صورت، استفاده از مدل فولد قابل توصیه می شود. اتحاد دو آلمان نمونه‌ای از این کاربرد است. گذر ناموفق سیستم‌های اقتصادی به یکدیگر می‌تواند با مدل دم پرستو[2] که سه پارامتر کنترل دارد، تبیین شود.

1. Hystersis
2. Swallowtail

مدل Butterfly از نظر رنه تام بنیان گذار نظریه کاتاستروف یک سیستم Source _ Message _ Receiver است. این مدل چهار پارامتری، در مدل سازی منشأ ابداعات (هسته)، تعامل پیام (بخش فرمان که سعی در تقلید تکنولوژی با ساختاری غیر بازاری دارد) و دریافت کننده (کشورهای جهان سوم) که منفعل هستند، کاربرد دارد.

مدل‌های آمبیلیک (هزلولی، بیضی وسهمی) شامل تعامل بین علت و معلول هستند. (هر کدام از این معادلات دو متغیر وضعیت دارند). این نوع رفتار می‌تواند به عنوان وضعیت پیچیده همکاری و رقابت در عرصه جهانی تفسیر شود.

برخی کاربردهای نظریه کاتاستروف را می توان به شرح ذیل بیان کرد:

۱. مدل‌های رشد غیرخطی که تعادل‌های آنها بستگی به پارامترهای سیستم داشته باشد، می‌تواند از طریق این نظریه مدل‌سازی شده و برای بیان و آزمون برخی از نظریات مانند "خیزرستو" مورد استفاده قرار گیرد.

۲. مباحث اقتصاد نهادگرایی و تغییرات نهادی به منزله پارامتر سیستم اقتصادی است که تغییر ناگهانی ایجاد می‌کنند در حالی‌که تغییر آنها کند و اندک است.

۳ .تغییر نظام اقتصادی از متمرکز به بازار آزاد.

۴.گذر از جامعه سنتی به مدرن

۵.منحنی فیلیپس که به طور اولیه مورد بررسی قرار گرفته است.

۶.تغییرات تکنولوژیک که منجر به تغییر روابط تولیدی و رشد می‌شود.

۷.رفتار مصرف کنندگان در انتخاب کالاها و تحقیقات بازاریابی.

البته، به جز موارد یادشده پدیده‌های متعددی در اقتصاد وجود دارند که می‌توانند با استفاده از نظریه کاتاستروف مدل‌سازی شوند و به طور کلی، می‌توان گفت هرگاه تغییرات کیفی ناگهانی در سیستم اقتصادی ایجاد شود، استفاده از نظریه کاتاستروف قابل بررسی است. در هر مدل‌سازی تعیین متغیرهای وابسته و مستقل، پارامترها و شکل تبعی مدل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

کاربرد رگرسیونی مدل‌های کاتاستروف در نرم‌افزارهایی مانند Eviews ممکن نیست مگر این‌که، پژوهشگرخود اقدام به نوشتن برنامه مناسبی کند. برخی از پژوهشگران مانند اولیوا (Oliva) نرم‌افزارهایی برای تخمین مدل‌های کاتاستروف معرفی کرده‌اند. همچنین، دستورهایی که قابل اجرا در فورترن، پاسکال و SAS هستند در سایت‌های اینترنت وجود دارد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

به منظور بررسی جنبه‌های غیرخطی و ناپیوستگی برخی از پدیده‌های اقتصادی می‌توان از مدل‌های کاتاستروف استفاده کرد. در این راستا، باید متغیرهای مستقل و وابسته و پارامترهای کنترل را مشخص کرده و از هفت نوع معادله کاتاستروف مدل مناسب را انتخاب کرد. تغییرات کیفی سیستم‌های اقتصادی وگذر از تعادل اولیه به تعادل جدید با نظریه مطرح شده در این نوشته قابل بررسی است. یکی از مهمترین مدل‌ها در کاربردهای تجربی مدل کاسپ است که دارای دو رویه تعادلی است. انتقال از یک تعادل به تعادل جدید در اثر تغییر پارامترهای مدل کاسپ صورت می‌گیرد.

مطالعات آتی در اقتصاد می‌تواند بر مشخص کردن زمینه کاربرد نظریه کاتاستروف، مدل‌سازی تجربی نظریه، روش‌های تخمین معادلات کاتاستروف و کاربردهای عملی آن متمرکز شود.

پرداختن به این نظریه در کنار سایر نظریه ها مانند نظریه شبکه های عصبی یا نظریه منطق فازی،نظریه امکان و نظریه آشوب می تواند در جهت دادن پژوهش‌های کاربردی در سطوح کارشناسی ارشد یا دکترا با استفاده از این نظریه‌ها مفید باشد.

منابع

Balasko, Y. (1978). Economic Equilibrium and Catastrophe Theory: ANN Introduction. *Econometrica*, Vol. 46. No. 3 (May 1978).

Cobb, L. (1998). *An Introduction to Cusp Surface Analysis, Aetheline Consultants.* 200 oak Run Carbondale, Co 8, 1632.

Cobbloren. (1978). Stochastic Catastrophe Models and Mutimodal Distribution. *Behavioral Science*, 23, 360-374.

Debreu. (1983). *Mathematical Economics.* Cambridge University press.

Ganchev, G. *The Transition As A Catastrophe: from Theory To plidy.* Reform Round Table Bulgarian Document No.6.

Groesen E.V. & E.M. Dejare (eds). *Studies In mathematical physics*. Vol 2. North Holland.

Guastello, S. J. (1995). *Chaos, Catastrophe and Humman Affairs.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Guastello. (1982). S.J.Moderator Regression and Shift Work: An Industrial Application of the Cusp – Difference equation. *Behavioral Science,* a, 27, 131-139.

Guillemin & Pollack. (1974). *Differential Topology.*

Lochwood, J.A. & Lochwood D.R. (1993). Catastrophe Theory: AUnified paradigm for Rangland Ecosystem Dynamics. *Journal of Range Management,* 46 (4), July.

Poston, T. & Stewart, I., N. (1976). *Taylor Expansions and Catastrophes*. Pitman publishing. London.

Puu, T. (1991). *Nonlinear Economic Dynamics*, Springer – Verlage.

Rosser, J. Barkley, Jr. (1991). *From Catastrophe to chaose: A General Theory of Economic Discontinuities.* Kluwer Acadamoc publishers.

Rummel, R.J. (2000). A Catastrophe Theory Model of the Conflict Helix With Tests. *Working paper*.

Varian, H.R. (1981). *Handbook of Mathematical Economics: Dynamical System With Application to Economics.* North – Holland.

Woodcook, A and D. Monte. (1978). *Catastrophe Theory.* New York: E. P. D utton.

Zeeman, E.C. (1974). On the Unstable Behaviour of stock Exchanges. *Journal of Mathematical Economics*. 1, 39 - 49.

Zeeman, E.C. (1976). *Catastrophe Theory Scientific American*. 234.65-83.