فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران/ سال بیستم/ شماره ۶۳/ تابستان ۱۳۹۴/ صفحات ۸۸-۷۱

قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی بر مبنای لگاریتم استاندارد شده میانگین هندسی

عبدالرحیم بادامچی‌زاده[۱]

نرگس حیدری[۲]

تاریخ ارسال: ۱۳۹۳/۱۱/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۷/۲۵

چکیده

اختیار آسیایی (یا اختیار میانگین) اختیاری است که بازده آن وابسته به میانگین قیمت دارایی پایه در سراسر یا بخشی از عمر اختیار است. قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی به صورت تحلیلی و عددی مشکل است و جواب دقیق برای این اختیارات در محیط بلک-شولز وجود ندارد و تمام جواب‌ها تقریبی هستند. فرمول های کران پایین و بالا برای قیمت این اختیارات توسط راجرز و شی محاسبه شده است که تفاوت کران پایین و کران بالا مستقل از قیمت توافقی است. در این مقاله کران‌های پایین و بالایی برای قیمت اختیارات آسیایی حسابی گسسته به دست می‌آوریم به گونه‌ای که تفاوت کران پایین و بالا وابسته به قیمت توافقی است.

واژگان کلیدی: اختیارات آسیایی، محیط بلک-شولز، قیمت توافقی، فرمول‌های کران پایین و بالا.

طبقه‌بندی JEL: *G13*.

۱- عضو هیات علمی گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی(نویسنده مسئول) badamchi@yahoo.com

۲- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ریاضیات مالی، دانشگاه علامه طباطبایی nargs_he68@yahoo.com

۱- مقدمه

مشتقاتی مانند اختیارات خرید و فروش اروپایی و اختیارات خرید و فروش آمریکایی که محصولات وانیلی[۱] نامیده می‌شوند، خصوصیات تعریف شده و استانداردی دارند و به‌صورت فعال در بازارهای بورس معامله می‌شوند، اما در بازارهای خارج از بورس مشتقاتی طراحی شده‌اند که محصولات نامتعارف[۲] نامیده می‌شوند. در بین گروه اختیارات نامتعارف، اختیارات آسیایی بیشتر از بقیه معامله می‌شوند.

اختیار آسیایی[۳] که اختیار میانگین نیز نامیده می‌شود، اختیاری مالی است که ارزش آن وابسته به میانگین قیمت دارایی‌های پایه در یک بازه زمانی مشخص است. دلایل متعددی برای خرید و فروش اختیارات آسیایی وجود دارد. برای نمونه یک شرکت با جریان‌های نقدی مداوم می‌تواند از اختیارات آسیایی برای کاهش نرخ معاوضه نامطمئن استفاده کند. همچنین اختیارات آسیایی، ارزان‌تر از اختیارات وانیلی همتای خود هستند. این اختیارات روشی ارزان برای مصون‌سازی در برابر ریسک ارائه می‌دهند، زیرا تلاطم کمتری دارند.

اختیار آسیایی اولین‌بار در سال ۱۹۸۷ توسط یکی از شعب بانک‌های آمریکایی در توکیو برای قیمت‌گذاری اختیارات میانگین نفت خام مورد استفاده قرار گرفت و آسیایی نامیده شد چون در آسیا بکار رفت (ون‌چن و همکاران[۴]، ۲۰۰۷، ص۱۷۱۱).

دو نوع اصلی اختیارات آسیایی، اختیارات آسیایی حسابی[۵] و اختیارات آسیایی هندسی[۶] هستند. محاسبه قیمت اختیارات آسیایی با میانگین هندسی آسان است و یک فرمول دقیق برای آن وجود دارد در حالی‌که محاسبه قیمت اختیارات آسیایی با میانگین حسابی چندان آسان نیست. دلیل اصلی برای دشواری قیمت‌گذاری آن است که در محیط استاندارد بلک شولز، قیمت اوراق بهادار توزیع لگ-نرمال دارد. (متغیر تصادفی، دارای توزیع لگ-نرمال است، هرگاه توزیع لگاریتم آن نرمال باشد.)

1- Vanilla Options
2- Exotic Options
3- Asian Options
4- Wen Chen, Kuan and Yuh-Douh Lyuu
5- Arithmetic Asian Options
6- Geometric Asian Options

اختیارات آسیایی حسابی، مجموعی از متغیرهای تصادفی لگ-نرمال است که توزیع لگ-نرمال ندارد. چندین روش برای برآورد این قیمت وجود دارد؛ نمونه کمنا و ورست[۱] (۱۹۹۰)، تورنبال و واکمن[۲] (۱۹۹۱)، ورست[۳] (۱۹۹۲)، لوی[۴] (۱۹۹۲)، کارن[۵] (۱۹۹۴) و راجرز و شی[۶] (۱۹۹۵) هر کدام روشی را برای این کار معرفی کرده‌اند.

در نیلسن و سندمن[۷]، کران پایین اختیار آسیایی به‌عنوان میانگینی از اختیارات اروپایی با پرداخت‌های معوقه بیان شده است. این روش‌ها در سه گروه قرار می‌گیرد:

۱) روش‌های عددی: کمنا و ورست اولین فرمول را برای قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی هندسی به‌دست آوردند. آنها قیمت اختیار آسیایی حسابی را به‌وسیله شبیه‌سازی مونت کارلو با روش کاهش واریانس محاسبه کردند. در این روش از میانگین هندسی به‌عنوان کنترل‌کننده متغیر تصادفی استفاده شده بود، اما چون از واریانس فقط برای تخمین خطا در یک بازه اطمینان ۹۵٪ می‌توان استفاده کرد، آنها نتوانستند ماکسیمم خطا را محاسبه کنند.

راجرز و شی و الزیاری، دکامپس و کوئل[۸] (۱۹۹۷)، قیمت اختیارات آسیایی را با حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی با روش تفاضلات متناهی محاسبه کردند. زوان، فرسیت و وتزال[۹] (۱۹۹۷/۹۸) از روش محدود کردن شار برای حل عددی این اختیارات که برمبنای نتایج بدون نوسان بود، استفاده کردند. با یک تغییر روش، اندرسن[۱۰] (۱۹۹۸) از PDE[۱۱] یک بعدی برای قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی با نمونه‌گیری گسسته و حل آن به روش عددی استفاده کرد.

1- Kemna and Vorst
2 Turnball, and Wakeman
3- Vorst
4- Levy
5- Curran
6- Rogers and Shi
7- Nielsen and Sandman
8 - Aliziary, Decamps and Koehl
9- Zvan, Forsyth and Vetzal
10- Andearsen
11- Partial Differential Equation

۲) روش تقریب تحلیلی: تورنبال و واکمن یک فرمول تقریبی به وسیله یکسان‌سازی چند گشتاور اول میانگین حسابی با توزیع لگ-نرمال به‌دست آوردند. آنها از روش شبیه‌سازی مونت کارلو به عنوان معیاری برای توجیه خطا استفاده کردند.

لوی (۱۹۹۲) با یکسان‌سازی دو گشتاور اول، یک فرمول تقریبی برای نمونه گسسته به‌دست آورد. او نیز از نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو برای توجیه خطای تقریب استفاده کرد.

گمن و یور (۱۹۹۳) یک جواب شبه صریح برای قیمت اختیارات آسیایی حسابی برحسب تبدیل لاپلاس معکوس یک تابع فوق هندسی هم‌جریان به‌دست آوردند. آنها نیز مجبور به استفاده از روش‌های عددی برای معکوس کردن تبدیل لاپلاس بودند، اما در پایان، کران خطا نداشتند.

میلسکی و پوسنر[۱] (۱۹۹۸) مجموعی از کمیت‌های دارای توزیع لگ-نرمال را با استفاده از توزیع گامای معکوس[۲] تقریب زدند و یک فرمول تقریبی جدید برای قیمت اختیارات آسیایی حسابی به دست آوردند. در کار آنها نیز عدم وجود کران خطا دیده می‌شود.

۳) روش‌های تقریب کران‌های بالا و پایین: راجرز و شی (۱۹۹۵) یک کران پایین و بالا برای اختیارات آسیایی حسابی به‌وسیله محاسبه امید ریاضی برخی از متغیرهای تصادفی گاوسی با میانگین صفر تهیه کردند، اما تفاوت کران پایین و بالای آنها به واقع بزرگ بود.

چلسانی و واریکوتی[۳] (۱۹۹۸) از مدل درخت سه‌جمله‌ای برای تخمین کران بالا و پایین اختیارات آسیایی با نمونه‌گیری گسسته استفاده کردند، اما الگوریتم آنها به اندازه کافی دقیق نبود.

تامسون[۴] (۲۰۰۰) کران بالایی با دقت بیشتر از کران بالای راجرز و شی و کران پایینی با محاسبات ساده‌تر و با دقت کران پایین آنها به‌دست آورد.

تعریف کران اختیار: به ماکسیمم یا مینیمم مقدار قیمت اختیار، کران اختیار می‌گویند.

1- Milevsky and Posner
2- Reciprocal Gamma Distribution
3- Chalasani and Varikooty
4- Thompson

در این مقاله از روش تقریب کران بالا و پایین برای قیمت‌گذاری اختیار آسیایی استفاده می‌کنیم. تفاوت بین کران‌های پایین و بالای حاصل از روش راجرز و شی مستقل از قیمت توافقی است. کران بالای جدید وابسته به قیمت توافقی است، چون کران‌های پایین و بالای به‌دست آمده برای اختیار خرید آسیایی را می‌توان از طریق قضیه برابری خرید و فروش[1] اختیار آسیایی به کران‌های پایین و بالا برای اختیار فروش آسیایی تغییر داد. همچنین نتایج حاصل برای اختیار فروش آسیایی برقرارند.

۱-۱- مدل بلک-شولز

مدل بلک-شولز ابزاری برای قیمت‌گذاری حقوق سهامداران اختیارات است. پیش از گسترش این مدل روش استانداردی برای قیمت‌گذاری اختیارات وجود نداشت. برای سال‌های متمادی محققان مالی از روش‌های پیچیده و غیرکارا برای قیمت‌گذاری اختیارات استفاده می‌کردند تا اینکه در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون با انتشار مقاله «قیمت‌گذاری اختیارات و بدهی‌های شرکتی» مدل جدیدی را برای قیمت‌گذاری اختیارات ارائه دادند. این اولین فرمول قیمت‌گذاری اختیارات و همچنین چارچوبی کلی برای قیمت‌گذاری ابزارهای مشتقه دیگر مانند اختیارات نامتعارف و بازارهای سواپ بشمار می‌رفت.

بازاری مالی شامل دو دارایی درنظر می‌گیریم؛ یک دارایی بدون ریسک با فرآیند قیمت B و یک سهم با فرآیند قیمت S. فرآیند قیمت B دارای دینامیکی به‌صورت رابطه (۱) است.

$$dB_t = r(t)B(t)dt \qquad (۱)$$

پاسخ این معادله دیفرانسیل معمولی عبارت است از:

$$B(t) = B(0).exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

نمونه‌ای رایج از دارایی بدون ریسک، حساب بانکی با نرخ بهره کوتاه‌مدت r است. همچنین فرض می‌کنیم فرآیند قیمت سهام S با رابطه (۲) بیان می‌شود.

1- Put-call Parity

$$dS_t = S(t)\alpha\big(t, S(t)\big)dt + S(t)\sigma\big(t, S(t)\big)d\hat{W}_t \qquad (۲)$$

که در آن $\hat{W}$ فرآیندی وینر و α و σ توابع تعینی هستند. مدل بلک-شولز که شامل دو دارایی با دینامیک‌های (۱) و (۲) است از فرض‌های زیر برخوردار است.

- هیچ هزینه معاملاتی و مالیاتی برای معامله‌کنندگان وجود ندارد.
- نرخ بهره بدون ریسک ثابت است و برای تمام سررسیدها وجود دارد.
- فروش عاریه‌ای سهام پایه وجود دارد.
- معامله روی سهام همواره قابل انجام است.
- فرصت آربیتراژی وجود ندارد.
- در خلال عمر مشتقه، سودی به دارایی پایه تعلق نمی‌گیرد.
- قیمت ابزارهای اساسی مانند سهم از فرآیند حرکت براوانی هندسی تبعیت می‌کند.

از آنجا که بازار بدون آربیتراژ و مدل بازار بلک-شولز کامل است، اندازه مارتینگل معادل یکتای Q وجود دارد که دینامیک فرآیند قیمت سهام نسبت به Q مطابق رابطه (۳) است.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (۳)$$

که در آن W_t حرکت براوانی استاندارد تحت اندازه احتمال Q است. جواب معادله (۳) عبارت است از:

$$S_t = S_0.exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

این معادله معرف حرکت براوانی هندسی است (بیورک، ۲۰۰۹).

۱-۲- بازده اختیارات آسیایی حسابی گسسته

فرض کنیم زمان‌های میانی به‌صورت $\{t_1 < \ldots < t_N = T\}$ با $t_i = \Delta.i$ که در آن $\Delta = t_i - t_{i-1}$ و $i = 1, 2, \ldots, N$ باشد. میانگین حسابی گسسته قیمت دارایی پایه به‌صورت $A(T) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i)$ تعریف می‌شود.

بازده اختیار خرید آسیایی حسابی گسسته در سررسید T برابر است با $max(A(T) - K, 0)$ یا $max(S(T) - A(T), 0)$ برحسب اینکه قیمت توافقی شناور و یا

ثابت K باشد. چون اختیارات آسیایی با قیمت توافقی شناور با اختیارات آسیایی با قیمت توافقی ثابت معادل هستند (هندروسن و همکاران[1]، ۲۰۰۲). کران‌ها را برای قیمت اختیار خرید آسیایی حسابی گسسته با قیمت توافقی ثابت به‌دست خواهیم آورد. بنابر فرض نبود فرصت آربیتراژ، قیمت اختیار خرید آسیایی حسابی در لحظه $t=0$، یا خلاصه‌تر قیمت اختیار آسیایی، با قیمت توافقی K و سررسید T که با نماد $C_A\left(K,T\right)$ نشان داده شده، برابر با تنزیل ارزش مورد انتظار بازده تحت اندازه مارتینگل معادل[2] است؛ یعنی:

$$C_A\left(K,T\right)=exp\left\{-rT\right\}E\left[\left[A\left(T\right)-K\right]^+\right]$$

۱-۳- قیمت اختیار آسیایی هندسی گسسته

اختیار آسیایی هندسی با قیمت توافقی K و سررسید T را درنظر می‌گیریم که از زمان صفر شروع می‌شود. در حالت گسسته، فرض می‌کنیم قیمت دارایی پایه در زمان‌های $t_0,t_1,...,t_n$ وقتی که $t_0=0$ و $t_i-t_{i-1}=\frac{T}{n}=\Delta$ برای $i=1,2,...,n$ نمونه‌گیری شده باشد. فرض می‌کنیم G^n میانگین هندسی گسسته این نمونه باشد، یعنی:

$$G^n=\left(\prod_{i=0}^{n}S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\sqrt[n+1]{S_{t_0}S_{t_1}...S_{t_n}}$$

مطابق نظر ورست (۱۹۹۲)، قیمت اختیار آسیایی هندسی گسسته عبارت است از:

$$\begin{aligned}C_G\left(K,T\right)&=exp\left\{-rT\right\}E\left[\left[G\left(T\right)-K\right]^+\right]\\&=exp\left\{-rT\right\}E\left[G\left(T\right)\right]N\left(d_G\right)-Kexp\left\{-rT\right\}N\left(d_G-\sigma_G\right)\end{aligned}$$

که در آن

$$d_G=\frac{m_G-lnK+\sigma_G^2}{\sigma_G}$$

1- Henderson and Wojakouski

۲- برای دیدن تعریف به بیورک، ۲۰۰۹، ص ۳۸ مراجعه کنید.

و

$$m_G = E\left[lnG(T)\right] = E\left[ln\left(\prod_{i=1}^{N} S(t_i)\right)^{\frac{1}{N}}\right]$$
$$= \frac{1}{N}\left(NlnS(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{N}\Delta.i\right)$$
$$= lnS(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{N+1}{2}\Delta$$

و σ_G^2 به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_G^2 = Var\left[lnG(T)\right] = Var\left[ln\left(\prod_{i=1}^{N} S(t_i)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{N^2}Var\left[\sum_{i=1}^{N}\left(lnS(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i + \sigma W_{t_i}\right)\right]$$
$$= \sigma^2\Delta\left[1 + \frac{(N-1)(2N-1)}{6N}\right]$$

گزاره ۱-۱، کران‌های ورست را برای قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی حسابی بیان می‌کند. این کران‌ها نتیجه‌ای از این نکته هستند که میانگین هندسی بزرگ‌تر از میانگین حسابی نیست.

گزاره ۱-۱: کران‌های بالا و پایین برای قیمت اختیار آسیایی حسابی بر حسب قیمت اختیار آسیایی هندسی مطابق رابطه (۴) است.

$$C_G(K,T) < C_A(K,T) < C_G(K,T) + exp\{-rT\}\, E\left[A(T) - G(T)\right] \qquad (۴)$$

اثبات: برای اثبات به (ورست، ۱۹۹۲) مراجعه کنید.

۱-٤- اختیارات اروپایی معمولی و اختیارات اروپایی با پرداخت‌های معوقه

قیمت اختیار آسیایی را می‌توان با قیمت‌های اختیارات خرید اروپایی معمولی و اختیارات اروپایی با پرداخت‌های معوقه مقایسه کرد. فرض کنیم $C(K_i,t_i)$ نشانگر قیمت اختیار خرید اروپایی معمولی سهام با سررسید t_i و قیمت توافقی K_i و $C(T,K_i,t_i)$ قیمت

اختیار خرید اروپایی معوقه با سررسید معوقه پرداخت T، $T > t_i$ باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} C(T,K_i,t_i) &= exp\{-r(T-t_i)\}C(K_i\ ,t_i) \\ &< exp\{-r(T-t_i)\}C(K_i,T) \\ &< C(K_i,T) \end{aligned}$$

۲- کران پایین حاصل از شرطی‌سازی

کارن (۱۹۹۴) و راجرز و شی (۱۹۹۵) جهت تعیین کران پایین برای قیمت اختیار آسیایی طرحی ارائه داده‌اند که از نابرابری زیر بهره گرفته است:

$$E\left[\left(A(T)-K\right)^+\right] = E\left[E\left[\left(A(T)-K\right)^+|Z\right]\right] \geq E\left[\left(E\left[A(T)-K|Z\right]\right)^+\right] \quad (۵)$$
$$› \ C_A^{l,Z}(K,T)e^{rT}$$

که در آن Z یک متغیر تصادفی گاوسی F_T اندازه‌پذیر است. N متغیر تصادفی $S(t_1),...,S(t_N)$ میانگین حسابی را به وجود می‌آورند و A با $A^{'}$ روی متغیر تصادفی Z جایگزین می‌شود. درنتیجه از یک‌سو خطای پیش‌بینی از معادله قیمت به‌وجود می‌آید و از سوی دیگر، معادله به‌دست آمده که شامل Z است، ممکن است به‌شکل دقیقی قابل حل باشد.

انتخاب کارن برای Z میانگین هندسی بود، اما راجرز و شی X را برابر با لگاریتم میانگین هندسی قرار دادند. در هر دو روش، کران پایین از طریق تقریب عددی انتگرالی به‌دست آمده است. در کنار این واقعیت که ضریب همبستگی میانگین هندسی و میانگین حسابی اندکی از یک کمتر است، برای حالتی که دارایی پایه از فرآیند حرکت براوانی هندسی پیروی می‌کند، خطای تقریب قابل اندازه‌گیری نیست. راجرز و شی این خطا را تقریب زدند درحالی‌که کارن این خطا را محاسبه نکرد.

در ادامه نشان می‌دهیم اگر Z با استاندارد شده لگاریتم میانگین هندسی برابر باشد، جواب دقیقی برای کران پایین وجود دارد. همچنین خطای تقریب معرفی‌شده توسط راجرز و شی می‌تواند اساساً کوچک‌تر شود (با توجه به مقادیر به‌دست آمده در جدول ۱-۴).

قضیه۲-۱. فرض کنید تحت اندازه مارتینگل معادل، قیمت دارایی پایه از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر تبعیت کند:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

که در آن r و σ ثابت هستند. همچنین فرض کنید Z متغیر شرطی‌ساز و به‌صورت زیر باشد:

$$Z = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N} W(t_i) = \frac{lnG(T) - E\left[lnG(T)\right]}{\sqrt{Var\left[lnG(T)\right]}}$$

که α ثابت نرمال‌کننده است و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\alpha^2 = Var\left[\sum_{i=1}^{N} W(t_i)\right] = \frac{N^2\sigma_G^2}{\sigma^2} = \Delta N(N+1)\left(\frac{1}{3}N + \frac{1}{6}\right)$$

در این صورت کران پایین $C_A^{l,Z}$ برای اختیار آسیایی با قیمت توافقی K و پرداخت $\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i) - K\right)^+$ در سررسید T عبارت است از:

$$C_A^{l,Z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} exp\left\{-r(T-t_i)\right\} C\left(T, K_i^*, t_i, \overline{\sigma}_i\right)$$
$$= \frac{S(0)}{N}\sum_{i=1}^{N} exp\left\{-r(T-t_i)\right\}\Phi\left(-z^* + \sigma m_i\right) - exp\left\{-rT\right\} K\Phi\left(-z^*\right)$$

که در آن

$$z^* = \left\{z \,\middle|\, \sum_{i=1}^{N} S(0)\,exp\left\{rt_i - \frac{1}{2}\sigma^2 m_i^2 + \sigma m_i z\right\} - NK = 0\right\},$$

$$m_i = E\left[ZW_{t_i}\right] = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{N} min\left\{t_i, t_j\right\} = \frac{\sqrt{3}i(2N+1-i)}{2\sqrt{N(N+1)\left(N+\frac{1}{2}\right)}}\sqrt{\Delta},$$

$$K_i^* = S(0)\,exp\left\{rt_i - \frac{1}{2}\sigma^2 m_i^2 + \sigma m_i z^*\right\},$$

$$\overline{\sigma}_i\sqrt{t_i} = \sigma m_i$$

و Φ تـابع توزیـع نرمـال اسـتاندارد اسـت. ملاحظـه مـی‌کنـیم کـه قیمـت اختیـار آسـیایی به‌صورت مجموعی از اختیارات خرید اروپایی با پرداخت‌های معوقه بیان می‌شود، یعنی:

اثبات. چون $Z = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N} W_{t_i}$ متغیر تصادفی نرمـال اسـتاندارد اسـت از قضـیه‌هـای معـروف امیـد و واریـانس شـرطی، $E\left[ZW\left(t_i\right)\right] = m_i Z$ و $Cov\left[W\left(t_i\right), W\left(t_j\right)\right] = min\left\{t_i, t_j\right\} - m_i m_j$ استفاده می‌کنیم. قیمت بدون آربیتراژ اختیار خرید آسیایی در لحظه صفر برابر است با:

$$exp\left\{-rT\right\} E\left[\left(A\left(T\right) - K\right)^{+}\right] = \frac{exp\left\{-rT\right\}}{N} E$$

$$\left[\sum_{i=1}^{N} S\left(0\right) exp\left\{rt_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i + \sigma W_{t_i}\right\} - NK\right]^{+}$$

کران پایین محاسبه شده توسط راجرز و شی مطابق رابطه (۶) است.

(۶)

$$\frac{exp\left\{-rT\right\}}{N} E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N}\left(S\left(0\right) exp\left\{rt_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i + \sigma W_{t_i}\right\}\right) - NK \middle| \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N} W_{t_i} = z\right]^{+}\right]$$

$$= \frac{exp\left\{-rT\right\}}{N} E\left[\left[\sum_{i=1}^{N} S\left(0\right) exp\left\{rt_i - \frac{1}{2}\sigma^2 m_i^2 + \sigma m_i z\right\} - NK\right]^{+}\right]$$

به‌جای استفاده از روش عددی که راجرز و شی بـرای حـل معادلـه (۶) بکـار بردنـد، شـکل دقیقی از جواب را در ادامه تعیین می‌کنیم. چون $m_i = E\left[ZW_{t_i}\right] > 0$، تابع:

$$S\left(o\right) exp\left\{rt_i - \frac{1}{2}\sigma^2 m_i^2 + \sigma m_i z\right\}$$

اکیداً صعودی و نسبت به z محدب است و مقادیر صفر تا $+\infty$ را اختیار مـی‌کنـد. از ایـن رو، بنابر قضیه نقطه ثابت، z^* تعریف شده در گزاره یکتاست و به عنوان یک نتیجه عبـارت کران پایین به شکل رابطه زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{exp\{-rT\}}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left[S(0)exp\left\{rt_i-\frac{1}{2}\sigma^2m_i^2+\sigma m_i z\right\}\left[I_{\{z\geq z^*\}}\right]-K_i^*\left[I_{\{z\geq z^*\}}\right]\right]$$

$$=\frac{exp\{-rT\}}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left[S(0)exp\left\{rt_i-\frac{1}{2}\bar{\sigma}_i^2t_i+\bar{\sigma}_i\sqrt{t_i}z\right\}\left[I_{\{z\geq z^*\}}\right]-K_i^*\left[I_{\{z\geq z^*\}}\right]\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}exp\{-r(T-t_i)\}C\left(T,K_i^*,t_i,\overline{\sigma_i}\right)$$

تأکید می‌کنیم که برای بیان کران پایین به‌عنوان میانگینی از قیمت‌های اختیارات خرید اروپایی با پرداخت‌های معوقه، یک دارایی پایه تعدیل‌شده یا مصنوعی درنظر گرفتیم که تحت اندازه احتمال ریسک خنثی در رابطه زیر:

$$\bar{S}(t_i)=S(0)exp\left\{rt_i-\frac{1}{2}\bar{\sigma}_i^2t_i+\bar{\sigma}_iW_{t_i}\right\}\qquad ,\ i=1,\ldots,N$$

متناظر با دنباله قیمت‌های توافقی K_i^* صدق می‌کند، که در آن $\overline{\sigma}_i=\frac{m_i\sigma}{\sqrt{t_i}}$ است.

در ادامه کران بالایی برمبنای خطای قیمت‌گذاری، $\in$، با استفاده از روش شرطی‌سازی ارائه می‌دهیم.

۳- کران بالا حاصل از شرطی‌سازی

گزاره ۱-۳. یک کران بالا برای قیمت اختیار آسیایی گسسته برمبنای خطای قیمت‌گذاری روش شرطی‌سازی، عبارت است از: $C_A^{u,Z}(K,T) < C_A^{l,Z}(K,T)+\in$

اثبات: اگر تابع چگالی نرمال استاندارد برای $Z=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N}W(t_i)$ را با $\phi(.)$ نمایش دهیم، با استفاده از رابطه زیر:[۱]

۱- برای مشاهده اثبات به (حیدری، نرگس، ۱۳۹۳، فرمول‌های دقیق برای قیمت‌گذاری اختیارات گسسته و پیوسته آسیایی، دانشگاه علامه طباطبایی) مراجعه کنید.

$$d=\frac{Nln\left(\frac{K}{S(0)}\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i}{\sigma\alpha}=-d_G+\sigma_G$$

کران حاصل از خطای قیمت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}0&\le E\left[E\left[\left[A(T)-K\right]^+|Z\right]-\left[E\left[A(T)-K|Z\right]\right]^+\right]\\&=\int_{-\infty}^{d}\left(E\left[\left[A(T)-K\right]^+|Z\right]-\left[E\left[A(T)-K|Z\right]\right]^+\right)\phi(z)\,dz\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{d}\left(E\left[\left|A(T)-K\right||Z\right]-\left|E\left[A(T)-K|Z\right]\right|\right)\phi(z)\,dz\\&\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{d}\left(E\left[\left(\left|A(T)-K-E\left[A(T)-K|Z\right]\right|\right)\middle|Z\right]\right)\phi(z)\,dz\\&\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{d}\left(Var\left[A(T)|Z\right]\right)^{\frac{1}{2}}\phi(z)\,dz\\&=\frac{1}{2}E\left[\left(Var\left[A(T)|Z\right]I_{\{z<d\}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(I_{\{z<d\}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\&\le\frac{1}{2}\left(E\left[Var\left[A(T)|Z\right]I_{\{z<d\}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\left[I_{\{z<d\}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

وقتی که نابرابری هولدر روی آخرین نابرابری اعمال شود، کران حاصل از خطای قیمت از روش شرطی‌سازی به شکل رابطه (۷) درمی‌آید:

$$\varepsilon=\frac{e^{-rT}}{2}\left(E\left[Var\left[A(T)|Z\right]I_{\{z<d\}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\left[I_{\{z<d\}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(۷)$$

با اعمال ویژگی‌های مقدار امید و واریانس شرطی، در گزاره ۱-۲، بازده برای خطای قیمت عبارت است از:

(۸)

$$\varepsilon = \frac{S(0)e^{-rT}}{2N}\Phi(d)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}e^{r(t_i+t_j)+\sigma^2 m_i m_j}\Phi\left(d\sigma^2\left(m_i+m_j\right)\right)\left(e^{\sigma^2\left(\min\left(t_i,t_j\right)-m_i m_j\right)}-1\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید.

٤- نتیجه‌گیری

در جدول ۱-۴، کران‌های بالا و پایین را مقایسه می‌کنیم و چندین مقدار تقریبی برای قیمت اختیار آسیایی حسابی را نمایش می‌دهیم. کران پایین ورست، مطابق با رابطه (۴) با $C_G(K,T)$ و کران پایین حاصل از روش شرطی‌سازی، که از کران ورست دقیق‌تر است با $C_A^{l,Z}(K,T)$ نشان داده شده است. با حرکت از چپ به راست جدول، چندین کران بالا نمایش داده شده است. ستون اول RS را نشان می‌دهد که شامل کران بالای محاسبه شده مطابق با رابطه (۷) و انتخاب $d=\infty$ است. این بیان کران مبنی بر روش راجرز و شی در سال ۱۹۹۵ است. ستون بعدی، ورست کران بالای حاصل از رابطه (۴) را نشان می‌دهد. ستون آخر متناظر است با $C_A^{u,Z}(K,T)=C_A^{l,Z}(K,T)+\in$ که در آن $\in$ از رابطه (۷) به‌دست می‌آید.

جدول ۱.۴: قیمت‌های تقریبی و کران‌ها برای اختیار آسیایی حسابی با **قیمت** توافقی ثابت، ۵۰۰۰۰ مسیر، $\sigma = 0.25$ و نرخ بهره‌ی **یکنواخت** $r = 0.04\%$.

time-to-maturity 3 years

Strike	$C_G(K,T)$	$C_A{}^{l,Z}$	MC	Levy	TW	Vorst	RS	Vorst	$C_A{}^{u,Z}$
50	48.534	50.0472	50.0506	50.0531	50.2409	50.0494	50.6536	50.0529	50.0488
60	39.7469	41.2278	41.2315	41.2637	41.387	41.2388	41.8342	41.2649	41.2382
70	31.2566	32.6569	32.6621	32.7573	32.5403	32.6725	33.2633	32.7746	32.6914
80	23.4654	24.7471	24.754	24.911	24.4198	24.7302	25.3535	24.9833	24.8222
90	16.7822	17.9343	17.9405	18.1138	17.6413	17.8339	18.5408	18.3001	18.0582
100	11.4543	12.4743	12.4799	12.6129	12.3638	12.2663	13.0807	12.9722	12.649
110	7.4996	8.383	8.3887	8.4489	8.4428	8.0849	8.9894	9.0176	8.611
120	4.7399	5.4825	5.4897	5.4761	5.6268	5.1338	6.0889	6.2579	5.768
130	2.9064	3.5097	3.5187	3.451	3.6602	3.1664	4.116	4.4243	3.8545
140	1.7355	2.2082	2.2153	2.1221	2.3237	1.8989	2.8146	3.2535	2.6097
150	1.0131	1.3703	1.3787	1.2777	1.4415	1.1125	1.9767	2.5311	1.8219
160	0.5808	0.8417	0.8507	0.756	0.8761	0.6395	1.4481	2.0988	1.3347
170	0.3286	0.5137	0.5203	0.4415	0.5236	0.3625	1.12	1.8465	1.0392
180	0.1843	0.3125	0.3196	0.2555	0.309	0.2036	0.9189	1.7023	0.8825
190	0.1029	0.1901	0.1955	0.1471	0.1807	0.1137	0.7965	1.6208	0.7578
200	0.0573	0.1159	0.1214	0.0844	0.105	0.0633	0.7223	1.5752	0.6962

time-to-maturity 10 years

Strike	$C_G(K,T)$	$C_A{}^{l,Z}$	MC	Levy	TW	Vorst	RS	Vorst	$C_A{}^{u,Z}$
50	44.6291	49.1937	49.2369	49.3785	40.8022	49.1545	51.4991	49.3386	49.2383
60	38.4767	42.8949	42.9428	43.2384	28.0727	42.7583	45.2003	43.1862	42.9859
70	32.7909	37.0393	37.0906	37.5324	22.288	36.7315	39.3447	37.5004	37.1888
80	27.6674	31.7404	31.7916	32.3394	20.3059	31.2053	34.0458	32.377	31.9545
90	23.1508	27.0472	27.0938	27.696	19.717	26.2599	29.3526	27.8603	27.3291
100	19.2427	22.9595	23.0116	23.6054	19.2619	21.9257	25.2649	23.9522	23.3123
110	15.9132	19.4444	19.4942	20.046	18.4754	18.194	21.7498	20.6227	19.8735
120	13.1114	16.4497	16.4999	16.9794	17.3005	15.0274	18.7551	17.8209	16.9623
130	10.7756	13.9148	13.9705	14.3573	15.8411	12.3709	16.2202	15.4851	14.5184
140	8.8413	11.7776	11.8417	12.1279	14.2346	10.1612	14.0837	13.5508	12.4785
150	7.2469	9.9796	10.0514	10.2398	12.5999	8.3342	12.285	11.9564	10.7819
160	5.9369	8.468	8.5427	8.6448	11.0224	6.8299	10.7734	10.6464	9.3736
170	4.8628	7.1971	7.2742	7.2996	9.555	5.5948	9.5024	9.5723	8.2055
180	3.9834	6.1257	6.2062	6.1662	8.2257	4.5826	8.4329	8.6929	7.2365
190	3.264	5.2265	5.3063	5.2116	7.0443	3.7541	7.5318	7.9735	6.4323
200	2.676	4.4662	4.5457	4.4078	6.0093	3.0766	6.7716	7.3855	5.7644

این کران بالای تحکیم‌یافته راجرز و شی، از تمام کران‌های بالایی که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند، برای سررسیدهای $T = 3$ سال و $T = 10$ سال دقیق‌تر است. کران‌های بالا

و پایین معرفی شده مقادیر دقیق‌تری نسبت به روش‌های تقریبی معرفی‌شده توسط لوی (۱۹۹۲)، تورنبال و واکمن (۱۹۹۱) و ورست (۱۹۹۲) برای قیمت اختیارات آسیایی حسابی دارند و محاسبه با آنها آسان‌تر است.

باتوجه به نزدیکی مقادیر به‌دست آمده از فرمول‌های کران بالا و پایین با روش شبیه‌سازی مونت-کارلو، نتیجه می‌شود که کران‌ها به‌شکل قابل توجهی دقیق هستند. بنابراین می‌توان از آنها به‌عنوان یک فرمول دقیق با محاسبات ساده برای قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی حسابی استفاده کرد.

۵- پیشنهاد برای مطالعات آتی

با توجه به اینکه در سال‌های اخیر قیمت‌گذاری مشتقات مالی بر مبنای فرآیند لوی بسیار مورد توجه بوده است، در مطالعات آینده قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی از روش تقریب کران بالا و پایین برمبنای فرآیند لوی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست منابع

حیدری، نرگس (۱۳۹۳)، *فرمول‌های دقیق برای قیمت‌گذاری اختیارات گسسته و پیوسته آسیایی*، دانشگاه علامه طباطبایی.

Aliziary, B., J. Decamps, and P. Koehl (1997),"A PDE Approach to Asian Options: Analytical and Numerical Evidence", *Journal of Banking and Finance,* No. 21, pp. 613-640.

Andearsen, J. (1998), "The Pricing of Discretely Sampled Asian and Lookback Options: A Change of Numraire Approach", *Journal of Computational Financ*e, No. 2(1), pp. 5-30.

Jork, Thomas. (2009), *"Arbitrage Theory in Continuous Time"*, Third Edition, Oxford University Press, London.

Chalasani, P., S. Jha, and A. Varikooty. (1998), "Accurate Approximation for European-style Asian Options", *Journal of Computational Financ*e, No. 1(4), pp. 11-30.

Curran, M. (1994), "Valuing Asian and Portfolio Options by Conditioning on the Geometric Mean Price", *Management Science,* No. 40, pp. 1705-1711

Geman, H., and M.Yor (1993), "Bessel Process, Asian Options and Perpetuities", *Mathematical Finance,* No. 3(4), pp. 349-375.

Henderson, V., and R. Wojakouski (2002), "On the Equivalence of Floating and Fixed-strike Asian Options", *Journal of Applied Probability,* No. 30 (2), pp. 391-394.

Kemna, A. G. Z., and A.C.F, Vorst (1990), "A Ppricing Method for Options Based on Average Asset Values", *Journal of Banking and Finance,* No. 14, pp. 113-129.

Levy, E. (1992), "Pricing European Average rate Currency Options", *Journal of International Money and Finance,*No.11, pp. 474-491.

Milevsky, M. A., and S. E. Posner (1998), "Asian Options the Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution", *Journal of Finance and Quantitative Analysis,* No. 33(3), pp. 409-422.

Nielsen, J. Aase., and Klaus Sandmann (2002), "Pricing of Asian Exchange Rate Options Under Stochastic Interest Rates as a Sum of Options", *Financial and stochastics,* No. 3(6), pp.355-370.

Rogers, L., and Z. Shi (1995), "The Value of an Asian Option", *Journal of Applied Probability,* No.32, pp. 1077-1088.

Thompson, G. W. P (2000), "Fast Narrow Bound on the Value of Asian Option", *Center for Financial Research,* Judge Institute of Management, University of Cambridge.

Turnball, S., and L. Wakeman (1991), "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options", *Journal of Financial and Quantative Analysis,* No. 26, pp. 377-389.

Vorst, T. (1992), "Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Option", *International Review of Financial Analysis,* No.1, pp. 179-193.

Wen Chen, Kuan., and Yuh-Douh Lyuu. (2007), "Accurate Pricing formulas for Asian Ooptions", *Journal of Applied Mathematics and Computation,* No. 188, pp. 1711-1724.

Zvan, R., P. Forsyth and K. Vetzal (1997/98), "Robust Numerical Methods for PDE Models of Asian Options", *Journal of Computational Finance,* No.1(2), pp. 39-78.