

## A New Method for Reliability Calculation of the Active Systems with Time-Dependent Failure Rates based on Weibull Distribution

**Pedram Pourkarim Guilani**

Ph.D. Candidate, Faculty of Industrial and Mechanical Engineering, Qazvin Branch, Islamic Azad University, Qazvin, Iran,

**Mani Sharifi\***

Associate Professor, Faculty of Industrial and Mechanical Engineering, Qazvin Branch, Islamic Azad University, Qazvin, Iran,

**Parham Azimi**

Associate Professor, Faculty of Industrial and Mechanical Engineering, Qazvin Branch, Islamic Azad University, Qazvin, Iran,

**Maghsoud Amiri**

Associate Professor, Department of Industrial Management, Management and Accounting Faculty, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran

### Abstract

Due to the high sensitivity in applying of electronic and mechanical equipment, creating any conditions to increase the reliability of these systems is one of the important issues for system designers. In the most studies in the reliability area, it is assumed that the failure rates of the system components are constant and have exponential distributions. Because, this distribution has memory less property that provides simple mathematical relationships in order to obtain the system reliability. But the major problem is that in a system with real world conditions, considering time-dependent failure rates for the components is more realistic to model processes. It means that, the system components do not fail with a constant rate during the time horizon; but this failure rate changes over the time. One of the most useful statistical distributions in order to model the time-dependent failure rates is the Weibull distribution. However, the main problem was that Weibull is not a memory less distribution, so it was impossible to apply simple and explicit mathematical relationships as the same as exponential distributions in order to obtain the system reliability. So, simulation technique was the only possible solution for researchers in this field. This technique leads to near-optimum solutions and it was time-consuming in the high number of iterations. So, in this paper, for the first time, it is tried to

\* Corresponding Author: M.Sharifi@Qiau.ac.ir  
How to Cite: Vol.19 No 61, Summer 2021

obtain a mathematical equation to calculate the reliability function of a system with time-dependent components based on Weibull distribution. For this purpose, an exact reliability function is obtained for the mentioned system by mathematical relations through Markov theorem and differential equation under some assumptions that which will be explained in the paper. Also, in order to validate the proposed method, the obtained results from proposed reliability function are compared with an implicit function for system reliability which is achieved via simulation.

**Keywords:** Reliability, Weibull distribution, Simulation, Time-dependent Failure Rates, Markov Theorem.

## روشی جدید جهت محاسبه قابلیت اطمینان سیستم‌های فعال با نرخ‌های خرابی وابسته به زمان مبتنی بر توزیع وایبل

دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، دانشکده مهندسی  
صنایع و مکانیک، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران

پدرام پورکریم گیلانی

دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، دانشکده مهندسی صنایع و  
مکانیک، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران

مانی شریفی\*

دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، دانشکده مهندسی صنایع و  
مکانیک، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران

پرهام عظیمی

استاد، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی

مقصود امیری

### چکیده

با توجه به حساسیت بالای کاربران در استفاده از تجهیزات الکترونیکی و مکانیکی، ایجاد شرایطی جهت افزایش پایایی این سیستم‌ها همواره از دغدغه‌های تولیدکنندگان است. در اکثر تحقیقات انجام شده در این حوزه، نرخ خرابی‌های اجزای تشکیل دهنده سیستم، ثابت فرض شده است که این امر به دلیل سهولت در به کارگیری توزیع نمایی به دلیل خاصیت بی حافظگی جهت استفاده از روابط ریاضی ساده آن است. این در حالی است در مسائل دنیای واقعی لزوماً اجزای تشکیل دهنده سیستم‌ها با نرخ ثابت خراب نمی‌شوند، بلکه خرابی آن‌ها طی دوره کارکرد، وابسته به زمان است. این بدان معنی است که اجزای سیستم طی یک افق زمانی معین با یک نرخ خرابی ثابت خراب نمی‌شوند؛ بلکه این نرخ خرابی با گذشت زمان دچار تغییر می‌شود. لذا در نظر گرفتن نرخ‌های خرابی وابسته به زمان برای اجزای تشکیل دهنده سیستم‌ها به منظور مدل‌سازی پایایی آن سیستم‌ها واقع بینانه‌تر است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین توزیع‌های آماری که قابلیت مدل‌سازی پایایی سیستم‌های وابسته به زمان را داراست، توزیع وایبل است. یکی از مشکلاتی که

مقاله حاضر برگرفته از رساله دکتری رشته صنایع دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین است.

\* نویسنده مسئول: [M.Sharifi@Qiau.ac.ir](mailto:M.Sharifi@Qiau.ac.ir)

حین استفاده از این توزیع آماری وجود داشت این بود که به دلیل عدم وجود خاصیت بی‌حافظگی، امکان استفاده از روابط ریاضی برای محاسبه پایایی سیستم‌های مبتنی بر توزیع وایبل وجود نداشت و تنها از طریق شبیه سازی اقدام به محاسبه تابع پایایی ضمنی می‌شد که این امر هم منجر به داشتن جواب مناسب اما نادقیق می‌شد و هم اینکه در تکرارهای بالا، زمان بر بود. لذا در این تحقیق با استفاده از یک روش جدید یک تابع ریاضی جهت محاسبه پایایی توزیع وایبل ارائه می‌شود. برای نیل به این مهم، از طریق به کارگیری برخی از مفروضات شرایطی مهیا می‌شود تا به کمک قضیه مارکوف، امکان محاسبه تابع پایایی از طریق رابطه منطقی فراهم آید که این امر در ادامه به تفصیل توضیح داده خواهد شد. نهایتاً به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، تابع پایایی ارائه شده در این مقاله با تابع ضمنی پایایی که از طریق فرآیند شبیه‌سازی به دست آمده است مقایسه شده و نتایج حاصل از آن گزارش شد و مشخص شد که استفاده از تابع پیشنهادی می‌تواند در فرآیند بهینه‌سازی پایایی سیستم‌های فعال با نرخ‌های خرابی وابسته به زمان مؤثرتر باشد.

**کلیدواژه‌ها:** پایایی، توزیع وایبل، شبیه‌سازی، نرخ خرابی وابسته به زمان، قضیه مارکوف

## مقدمه

بهبودسازی پایایی یکی از روش‌های مهم در بهبود کیفیت تولید صنایع مختلف است. روش‌های گوناگونی جهت ارتقاء پایایی سیستم‌ها وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به مسئله تخصیص افزونگی، سیاست‌های نگهداری و تعمیرات (نت)، فعالیت‌های فنی و سازمانی، گروه‌های اشتراک کاری و ... اشاره کرد. نکته‌ای که در تمامی این روش‌ها مشترک است، وابستگی آن‌ها به نرخ‌های خرابی اجزای تشکیل دهنده سیستم است. بدین گونه که با توجه به نوع توزیع آماری نرخ خرابی اجزای تشکیل دهنده سیستم، ایجاد شرایط متفاوتی برای تصمیم‌گیرندگان سیستم وجود خواهد داشت. یکی از توزیع‌های آماری مهم که بیش از سایر توزیع‌ها در مدلسازی نرخ‌های خرابی اجزای تشکیل دهنده سیستم‌ها به کارگیری می‌شود، توزیع نمایی بود. زیرا به دلیل خاصیت بی‌حافظگی این توزیع، امکان استفاده از فرآیند مارکوف جهت به دست آوردن دستگاه معادلات دیفرانسیل سیستم میسر است و می‌توان از طریق حل این معادلات، تابع پایایی سیستم را محاسبه نمود. به همین جهت، استفاده از فرآیند مارکوف همواره مورد توجه پژوهشگران این حوزه قرار گرفته است. گری<sup>۱</sup> (۱۹۸۵) یک روش ماتریس زمان پیوسته مارکوف را برای پیش‌بینی پایایی زیرگروه‌های موازی فعال در اجزای یکسان به کار بردند. بانژویچ و ژاردین<sup>۲</sup> (۲۰۰۶) اقدام به محاسبه تابع پایایی از طریق فرآیند زمان خرابی مارکوف کردند. در این مقاله نشان داده شده که از طریق قضیه چپمن-کولموگروف و معادلات دیفرانسیل می‌توان تابع پایایی سیستم‌های با نرخ خرابی ثابت را به دست آورد. فلامینی<sup>۳</sup> و همکاران (۲۰۰۹) بر روی مدل نگهداری و تعمیرات بر پایه زنجیره مارکوف زمان پیوسته مطالعه کردند و از شبکه‌های ییزی برای تحلیل تأثیر نت ناقص بر ایمنی سیستم استفاده کردند. همچنین، یک فرآیند مارکوف زمان پیوسته برای محاسبه دسترس‌پذیری سیستم‌های چندحالتی در حال نزول که کم‌ترین مقدار تعمیرات و نت پیشگیرانه بر روی آن‌ها انجام

---

1. Gray

2. Banjevic and Jardine

3. Flammini

می‌شود توسط سورو<sup>۱</sup> و همکاران (۲۰۱۰) انجام شد. به علاوه هوآنگک و یوآن<sup>۲</sup> (۲۰۱۰) از یک زنجیره مارکوف زمان گسسته چند حالتی جهت مدلسازی سیاست نت پیشگیرانه دو مرحله‌ای برای یک سیستم چندحالتی نزولی تحت بازرسی دوره‌ای با چندین اقدام بالقوه به منظور نت پیشگیرانه استفاده کردند. نورالفتح<sup>۳</sup> (۲۰۱۲) یک روش ترکیبی بر پایه زنجیره مارکوف، الگوریتم ژنتیک و تابع مولد عمومی را جهت محاسبه تابع دسترس‌پذیری و هزینه برای یک سیستم چندحالتی ارائه دادند. لاندن<sup>۴</sup> و همکاران (۲۰۱۳) مدلی را برای قابلیت اطمینان نرم‌افزاری ارائه دادند. مدل ارائه شده آن‌ها قادر بود فرآیند اشکال‌زدایی را بهبود دهد. برای این مهم، آن‌ها از یک مدل مارکوف بر مبنای فرآیند پواسون استفاده کردند.

پورکریم گیلانی و همکاران<sup>۵</sup> (۲۰۱۴) با استفاده از فرآیند مارکوف، روشی جدید را در محاسبه قابلیت اطمینان سیستم‌های سه حالتی ارائه دادند. آن‌ها ابتدا معادلات دیفرانسیل سیستم را از دست آورده از طریق حل آن، تابع پایایی را محاسبه نمودند. فضل‌الله تبار و همکاران<sup>۶</sup> (۲۰۱۵) از یک روش مارکوف برای محاسبه پایایی در حالت پایدار سیستم استفاده کردند. مونترو-کازورلا و پرز-اوکان<sup>۷</sup> (۲۰۱۸) یک فرآیند مارکوف را به منظور محاسبه پایایی سیستمی تحت شرایط شوک، خرابی‌های داخلی و بازرسی پیاده‌سازی کردند. در مقاله آن‌ها به منظور استفاده از فرآیند مارکوف فرض شده است که شوک‌های وارد بر سیستم به صورت فرآیند پواسون بوده و خرابی‌های داخلی و زمان‌های بازرسی دارای توزیع احتمالی نمائی هستند.

اگرچه در اکثر تحقیقات انجام شده در حوزه پایایی سیستم‌ها، فرض شده که نرخ خرابی اجزاء ثابت و بر مبنای توزیع نمایی است، اما آشکار است که سیستم‌های زیادی در دنیای واقعیت وجود ندارند که نرخ خرابی اجزای تشکیل دهنده آن‌ها ثابت باشد. بنابراین، در نظر گرفتن نرخ‌های خرابی وابسته به زمان برای اجزای تشکیل دهنده سیستم‌ها واقع بینانه‌تر

- 
1. Soro
  2. Huang and Yuan
  3. Nourelfath
  4. Montoro-Cazorla and Pérez-Ocón
  5. Pourkarim Guilani
  6. Fazlollahtabar
  7. Montoro-Cazorla and Pérez-Ocón

بوده و شرایط مسئله را به شرایط دنیای واقعی نزدیک تر می کند. یکی از مهم ترین و کاربردی ترین توزیع های آماری که قابلیت مدلسازی نرخ خرابی وابسته به زمان برای اجزای تشکیل دهنده سیستم ها را دارند، توزیع وایبل است. زیرا این تابع توزیع، دارای انعطاف پذیری مناسب جهت در نظر گرفتن نرخ های خرابی کاهشی و افزایشی برای اجزای سیستم ها است.

کویت و اسمیت<sup>۱</sup> (۲۰۰۲)، از الگوریتم ژنتیک جهت حل مسئله تخصیص افزونگی با تابع هدف بیشینه سازی حد پایین توزیع زمان تا خرابی سیستم استفاده کردند که در کار آن ها، اجزای در دسترس دارای پارامترهای مقیاس تصادفی از توزیع وایبل بودند. هیسادا و آریزونا<sup>۲</sup> (۲۰۰۲) به بررسی پایایی توزیع وایبل با پارامتر شکل متنوع پرداختند. برخی از مدل های شناخته شده پایایی بر مبنای توزیع وایبل در مقالات ناداراجا و کوتز<sup>۳</sup> (۲۰۰۵) و همچنین فام و لی<sup>۴</sup> (۲۰۰۷) مورد بررسی قرار گرفته است. کاراسکو<sup>۵</sup> و همکارانش (۲۰۰۷) یک توزیع چهار پارامتری طول عمر معروف به توزیع وایبل اصلاح شده تعمیم یافته را معرفی و توسعه دادند که این توزیع پیشنهادی قادر به مدلسازی مسائل با توابع نرخ خرابی افزایشی، کاهشی، وان حمامی و تک مدی بود. همچنین، هوآنگ و ژو<sup>۶</sup> (۲۰۱۰) یک حالت فرم بسته را برای پایایی طول عمر سیستم های افزونه ترکیبی  $k$ -out-of- $n$ : $G$  ارائه دادند که توزیع عمر قطعات در حالت های عملیاتی متنوع، با یکدیگر ادغام شده اند. در این تحقیق، آن ها از توزیع وایبل به عنوان یکی از توزیع های عمر قطعات استفاده کردند. ژیانگ<sup>۷</sup> و همکارانش (۲۰۱۰) یک تخمین درست نمایی بیشینه اصلاح شده<sup>۸</sup> را برای محاسبه پایایی بدون استفاده از داده های خرابی ارائه دادند. در مقاله آنان، تابع توزیع عمر بر اساس توزیع وایبل در نظر گرفته شده بود. المهدی و ابوتهام<sup>۹</sup> (۲۰۱۳) داده های

- 
1. Coit and Smith
  2. Hisada and Arizino
  3. Nadarajah and Kotz
  4. Pham and Lai
  5. Carrasco
  6. Huang and Xu
  7. Jiang
  8. Modified Maximum Likelihood Estimation (MMLE)
  9. Elmahdy and Aboutahoun

طول عمر را برای سیستم‌های دارای حالت‌های خرابی با استفاده از ترکیب محدودی از توزیع وایبل مدل‌سازی کردند. اریلماز<sup>۱</sup> (۲۰۱۳) به بررسی پایایی یک سیستم k-out-of-n:G با یک واحد آماده به کار گرم پرداخت. در این مقاله حالتی صریح را برای تابع پایایی سیستمی با توابع دلخواه از جمله وایبل به دست آمد. پنگ و یان<sup>۲</sup> (۲۰۱۴) یک توزیع وایبل توسعه یافته با دو پارامتر مقیاس و دو پارامتر شکل را ارائه دادند. همچنین در این تحقیق مدلی جدید با تابع نرخ خرابی افزایشی به صورت وارونه وان شکل و دارای چولگی مثبت و منفی بررسی و پارامترهای آن تخمین زده شدند.

زمانی که نرخ خرابی اجزای تشکیل دهنده یک سیستم به صورت وابسته به زمان و بر مبنای توزیع وایبل باشد، به دست آوردن تابع پایایی به صورت دقیق و صریح برای آن، دشوار و یا حتی غیرممکن است. در این شرایط، به دلیل عدم امکان استفاده از روابط ریاضی و آماری، استفاده از روش‌های تقریبی به منظور تخمین تابع پایایی تنها راهکار موجود در ادبیات مسائل پایایی بود. وو<sup>۳</sup> و همکاران (۲۰۱۸) از یک روش تقریبی برای ارزیابی تابع پایایی سیستم‌های ایمنی ابزار با نرخ خرابی وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل استفاده کردند

یکی از پرکاربردترین روش‌ها در تخمین تابع پایایی، استفاده از تکنیک‌های متنوع شبیه‌سازی است که منجر به داشتن یک تابع ضمنی می‌شد. وانگ<sup>۴</sup> و همکاران (۲۰۱۴)، از یک روش شبیه‌سازی مونت کارلو جهت محاسبه سیستمی با نرخ خرابی وابسته به زمان استفاده کردند. پورکریم گیلانی و همکاران (۲۰۱۶)، مسئله تخصیص افزونگی را برای یک سیستم با نرخ خرابی وابسته به زمان افزایشی بر مبنای توزیع وایبل توسعه داده و به کمک شبیه‌سازی اقدام به تخمین تابع پایایی سیستم کردند.

اما هنگامی که از تکنیک‌های متنوع شبیه‌سازی به منظور محاسبه تابع پایایی به صورت ضمنی استفاده می‌شود، علیرغم سهولت استفاده از آن، نکاتی وجود دارد که ممکن است محققین را دچار چالش نماید.

- 
1. Eryilmaz
  2. Peng and Yan
  3. Wu
  4. Wu



اولین نکته این است که استفاده از شبیه سازی جهت تخمین تابع پایایی اگرچه منجر به به دست آمدن جواب قابل قبول می شود ولی نمی توان ادعایی در خصوص بهینه بودن آن جواب داشت. زیرا این روش از طریق روش های آماری شامل طرح های فاکتوریال، طراحی آزمایش ها و ... به یک تابع ضمنی از تابع اصلی منجر می شود که قطعاً به دلیل تخمین، نمی توان مدعی بود که این تابع به جواب دقیق می رسد.

همچنین ضعف دیگری که در استفاده از شبیه سازی وجود دارد این است که به دلیل داشتن تخمین مناسب از این روش نیاز است که در شبیه سازی در تکرارهای زیادی انجام شود تا جواب مناسبی را ارائه دهد و لزوماً یک بار شبیه سازی منجر به داشتن تخمین مناسب از تابع مورد نظر نخواهد شد. لذا هرچه میزان تکرار در شبیه سازی مسئله بیشتر باشد، دقت تابع به دست آمده نیز بیشتر خواهد بود. ولی این امر موجب بروز مشکل زمان اجرای بالا نیز خواهد شد. یعنی هرچه تعداد تکرارهای شبیه سازی جهت رسیدن به جواب مناسب بیشتر باشد، زمان بیشتری برای به دست آمدن تابع مورد نظر صرف خواهد شد که این امر ممکن است در فرآیند بهینه سازی مشکل ایجاد نماید.

البته ذکر این نکته نیز ضروری است که علاوه بر تعداد تکرارهای بیشتر، تعداد اجزای افزونه بیشتر نیز موجب آن می شود که زمان لازم جهت تخمین تابع پایایی سیستم از طریق فرآیند شبیه سازی افزایش یابد. یعنی اگر زیرسیستمی را متشکل از ۱۰۰ جزء با نرخ های خرابی وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل در نظر بگیریم، زمان لازم برای تخمین تابع پایایی آن از طریق فرآیندهای شبیه سازی در مقایسه با زیرسیستمی متشکل از ۲۰ جزء با همان شرایط بسیار بیشتر خواهد بود. در نتیجه، اگرچه استفاده از شبیه سازی در بسیاری از موارد اجتناب ناپذیر بوده و حتی می توان ادعا کرد که تنها راه موجود جهت رسیدن به جواب است، ولی به دلایل عنوان شده، در صورتی که این امکان فراهم آید که بتوان تابع پایایی سیستم های وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل از طریق روش های ریاضی محاسبه شوند، جواب های به دست آمده بسیار قابل اتکاتر خواهند بود و با قدرت بیشتری می توان به آنها استناد کرد. لذا برای اولین بار در این مقاله سعی شده است یک تابع ریاضی جهت محاسبه پایایی سیستمی موازی و متشکل از اجزایی با نرخ های خرابی وابسته به زمان بر

مبنای توزیع آماری وایبل و بدون استفاده از تکنیک‌های شبیه‌سازی ارائه شود. برای نیل به این مهم، از طریق به کارگیری برخی از مفروضات، شرایطی مهیا شد که امکان محاسبه این تابع از طریق رابطه منطقی ریاضی فراهم آید.

برای این کار، سیستم پیشنهادی این مقاله در بخش دوم به طور کامل توضیح داده خواهد شد. در بخش سوم، به منظور اعتبارسنجی روش پیشنهادی، یک فرآیند شبیه‌سازی برای محاسبه تابع پایایی به صورت ضمنی ارائه می‌شود. در بخش چهارم از طریق ارائه مثال‌های عددی متنوع، روش پیشنهادی با روش شبیه‌سازی مقایسه شده و نتایج آن گزارش خواهد شد. نهایتاً، بخش پنجم شامل ارائه نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی خواهد بود.

### تعریف مسئله

همان‌طور که در بخش قبلی اشاره شد، با توجه به این که در نظر گرفتن نرخ خرابی‌های اجزای سیستم به صورت ثابت و بر مبنای توزیع نمایی در جهان واقعیت کاربرد زیادی ندارد، این مقاله در نظر دارد از نرخ خرابی‌های وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل استفاده کند که با توجه به آن، مسئله پیشنهادی به مسائل دنیای واقعی نزدیک‌تر خواهد شد. لذا این مقاله برای اولین بار یک روش جدید جهت بدست آوردن یک رابطه ریاضی برای محاسبه پایایی سیستم‌هایی با نرخ‌های خرابی وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل دست می‌یابد تا از طریق آن حتی بدون نیاز به شبیه‌سازی اقدام به محاسبه پایایی سیستم کرد.

اگرچه نتایج بدست آمده از این روش به راحتی و با استفاده از روش‌های احتمالی نیز قابل محاسبه می‌باشد، در صورتی که تغییری در وضعیت عملکردی اجزاء بوجود آید، دیگر نمی‌توان از روش‌های مبتنی بر تئوری احتمالات قابلیت اطمینان سیستم را محاسبه نمود.

به عنوان مثال می‌توان از یک سیستم با  $n$  جزء که با سیاست فعال در حال کار بوده و عملکرد اجزاء بصورت تقسیم با می‌باشد نام برد. در این سیستم‌ها پس از خرابی اولین جزء بار وارد بر اجزاء باقی مانده افزایش یافته و به عبارتی نرخ خرابی این اجزاء افزایش خواهند یافت. حال اگر توزیع عمر اجزاء وایبول باشد این افزایش بار اثر خود را بر روی پارامتر گستردگی توزیع نمایان کرده و این پارامتر وابسته به تعداد اجزاء در حال کار خواهد بود.

در این مدل محاسبه احتمال با استفاده از روش‌های آماری بسیار پیچیده بوده و با افزایش تعداد اجزاء عملاً امکان پذیر نمی‌باشد. برای اثبات این موضوع می‌توان به تحقیقات مندز و همکاران (۲۰۱۴) اشاره نموده که در آن اگرچه نرخ خرابی اجزاء قابت می‌باشد، ولی به دلیل پیچیدگی بالای محاسبات نویسنده فقط سیستم را با ۲ و ۳ جزء مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین می‌توان مشاهده نمود زمانی که سیستم فقط دارای ۳ جزء می‌باشد محاسبه احتمال کارکرد سیستم با استفاده از احتمال شرطی بسیار طولانی و پیچیده می‌باشد. لذا در این قسمت سعی می‌شود تا روش پیشنهادی برای محاسبه پایداری سیستم توضیح داده شود. از این رو، ابتدا یک توضیح مختصر از توزیع وایبل ارائه شده و پس از آن روش پیشنهادی شرح داده می‌شود. شایان ذکر است توضیحات و روابط ارائه شده در این قسمت در مقاله پورکریم گیلانی و همکاران (۲۰۱۶) قابل مشاهده است.

توزیع وایبل:

یکی از مهمترین توزیع‌های مورد استفاده برای تخمین طول عمر سیستم در قابلیت اطمینان توزیع وایبل می‌باشد. تابع توزیع وایبل می‌تواند هم در مدل‌های نرخ خرابی افزایشنده ( $IFR^1$ ) و هم در مدل‌های نرخ خرابی کاهنده ( $DFR^2$ ) مورد استفاده قرار گیرد. تابع نرخ خرابی این توزیع آماری برابر با  $h(t) = \lambda t^\gamma$  است. در این توزیع، اگر  $\lambda > 0$  و  $\gamma > 0$  باشد، در این صورت  $h(t)$ ، یک تابع افزایشی از  $t$  بوده و در این شرایط، توزیع وایبل جهت مدلسازی سیستم‌های با نرخ خرابی افزایشنده به کار گیری می‌شود. همچنین اگر  $\lambda > 0$  و  $\gamma < 0$  باشد، در این صورت  $h(t)$ ، یک تابع کاهش‌ی از  $t$  بوده و در این شرایط، توزیع وایبل جهت مدلسازی سیستم‌های با نرخ خرابی کاهنده به کار گیری می‌شود. در حالت کلی، اگر نرخ خرابی بر حسب زمان بصورت تابع زیر در نظر گرفته شود:

$$h(t) = \frac{\beta}{\theta} \left( \frac{t}{\theta} \right)^{\beta-1} ; \theta > 0 ; \beta > 0 ; t \geq 0 \quad (1)$$

- 
1. Increasing Failure Rate
  2. Decreasing Failure Rate

در این صورت تابع توزیع نرخ خرابی دارای توزیع وایبل بوده که روابط آن بصورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$R(t) = e^{-(t/\theta)^\beta}; \quad \theta > 0; \quad \beta > 0; \quad t \geq 0 \quad (۲)$$

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\theta)^\beta}; \quad \theta > 0; \quad \beta > 0; \quad t \geq 0 \quad (۳)$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\theta)^\beta}; \quad \theta > 0; \quad \beta > 0; \quad t \geq 0$$

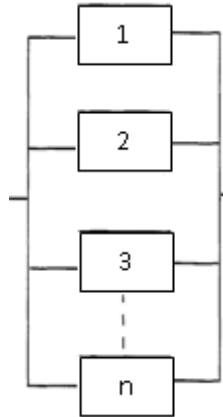
(۴)

که در روابط فوق  $R(t)$ ،  $f(t)$  و  $F(t)$  به ترتیب تابع پایایی، تابع توزیع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی  $t$  هستند. همچنین در این تابع،  $\beta$  پارامتر شکل و  $\theta$ ، پارامتر مقیاس تابع توزیع وایبل هستند. به منظور درک بهتر از روابط، فرض می‌شود که  $\lambda = \beta/\theta$  و  $\gamma = \beta - 1$  باشند.

#### تعریف سیستم

سیستمی را متشکل از  $n$  جزء یکسان که به صورت موازی به یکدیگر متصلند را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. فرض کنید نرخ خرابی هر یک از این اجزاء بر مبنای توزیع وایبل و به صورت  $h(t) = \lambda t^\gamma$  باشد. برای محاسبه تابع پایایی این سیستم، مفروضات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- ✓ سیستم متشکل از تعدادی از اجزاء است که به صورت موازی به یکدیگر متصلند
- ✓ اجزای تشکیل دهنده زیرسیستم یکسان اند
- ✓ نرخ خرابی هر یک از اجزاء، بر مبنای توزیع وایبل است
- ✓ اجزاء تعمیر ناپذیرند
- ✓ اجزاء به صورت باینری هستند (سالم یا خراب)
- ✓ خرابی اجزاء به صورت مستقل است
- ✓ در هر زیرسیستم از سیاست فعال استفاده می‌شود.



شکل ۱. ساختار سیستم مورد مطالعه

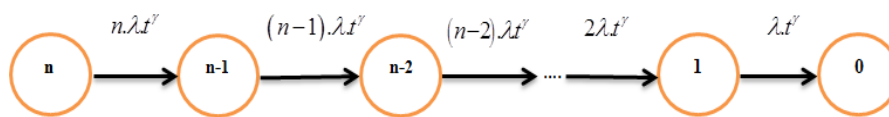
در این شرایط، اگر سیاست این سیستم به صورت فعال در نظر گرفته شود، در این صورت تمامی اجزای تشکیل دهنده آن به صورت هم‌زمان مشغول به کار خواهند بود. در این شرایط، با خرابی یکی از اجزای در حال کار، سایر اجزاء کماکان به کار کردن ادامه می‌دهند و این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که تمامی اجزای در حال کار، خراب شوند. با توجه به این مهم که فرض شده است تمامی اجزای سیستم یکسان، هم توزیع و مستقلند، لذا خرابی یک جزء، منجر به خرابی سایر اجزای باقیمانده در حال کار نمی‌شود. در این وضعیت، اولین خرابی زمانی رخ می‌دهد که مینیمم نرخ خرابی‌ها اتفاق بیفتد. می‌دانیم مینیمم چند توزیع وایبل با پارامترهای  $\theta$  و  $\beta$ ، دارای توزیع وایبل با پارامترهای  $\beta$  و  $\frac{\theta}{n^{1/\beta}}$  خواهد بود (راس<sup>۱</sup> (۲۰۱۴)). بنابراین:

$$\text{Min}(T)_i \sim \text{weib}\left(\frac{\theta}{n^{1/\beta}}, \beta\right)$$

$$h(t) = n \frac{\beta}{\theta^\beta} t^{\beta-1}$$

(۵)

مطابق رابطه (۵)، تابع نرخ خرابی  $n$  متغیر توزیع وایبل مستقل با پارامترهای یکسان، معادل با  $n$  برابر تابع خرابی یک متغیر توزیع وایبل است. بنابراین، بر اساس تعاریف بالا، دیاگرام حالت سیستم مفروض مطابق شکل ۲ خواهد بود.



شکل ۲. دیاگرام حالت سیستم پیشنهادی

برای این که دیاگرام حالت شکل ۲ برای سیستم پیشنهادی قابل قبول باشد، باید به صورت هم‌زمان، دو شرط برای سیستم برقرار باشد. نخست آن که تنها یک خرابی در هر لحظه رخ دهد و دوم این که توزیع وایبل دارای خاصیت مارکوفی باشد. می‌دانیم جهت استفاده از قضیه مارکوف در ادبیات موجود مسائل پایایی، همواره فرض اساسی این بود که نرخ خرابی‌های قطعات سیستم باید ثابت و بر مبنای توزیع نمایی باشد. زیرا این توزیع به دلیل خاصیت بی‌حافظگی، امکان استفاده از روابط قضیه چپمن-کولموگروف را فراهم نموده و در نتیجه می‌توان به کمک معادلات دیفرانسیل، اقدام به محاسبه پایایی سیستم نمود. در حالی که در این تحقیق نشان داده شده است برای استفاده از مارکوف در محاسبه پایایی یک سیستم، لزوماً نباید توزیع نرخ خرابی‌های آن سیستم بی‌حافظه باشد. بلکه این فرآیند سیستم است که باید بی‌حافظه باشد. لذا در ادامه مقاله، ابتدا از طریق قضایای ۱ و ۲ نشان داده شد که تعداد اتفاقات در لحظه نمی‌تواند بیش از یک باشد و همچنین وقوع اتفاق در هر مرحله، فقط و تنها فقط به مرحله قبل‌تر بستگی داشته و به مراحل قبل از آن وابسته نیست. سپس از طریق مارکوف پایایی سیستمی با نرخ خرابی بر مبنای توزیع وایبل محاسبه شد.

در ادامه، قضیه‌های ۱ و ۲ به بررسی این دو شرط می‌پردازند.

قضیه ۱: با فرض آن که زمان بین خرابی‌های اجزاء وایبل باشد، احتمال وجود بیش از یک

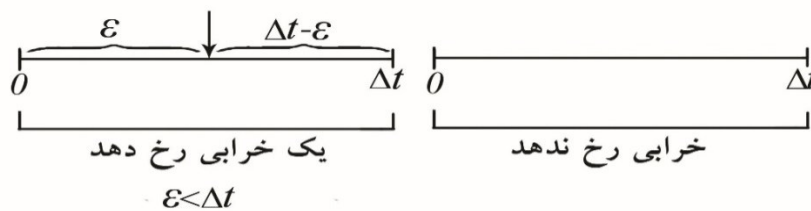
خرابی در بازه زمانی  $\Delta t$ ، وقتی که  $\Delta t \rightarrow 0$  باشد، برابر صفر است

اثبات: تابع  $N(x)$  را به عنوان تعداد خرابی از لحظه ۰ تا لحظه  $x$  تعریف می‌کنیم.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\{N(\Delta t) \geq 2\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1 - P\{N(\Delta t) \leq 1\} \quad (۶)$$

به منظور درک بهتر، شکل ۳ را در نظر بگیرید. مطابق این شکل، احتمال این که کم تر یا مساوی یک خرابی در هر لحظه وجود داشته باشد برابر است با:

$$P\{N(\Delta t) \leq 1\} = P\{N(\Delta t) = 1\} + P\{N(\Delta t) = 0\} \quad (۷)$$



شکل ۳. یک شمای گرافیکی از احتمال خرابی در لحظه

مطابق تابع توزیع احتمال وایبل خواهیم داشت:

$$P\{N(\Delta t) = 0\} = P\{x \geq (\Delta t)\} = e^{-(\Delta t/\theta)^\beta} \quad (۸)$$

$$P\{N(\Delta t) = 1\} = P\{x < (\Delta t - \varepsilon)\} = 1 - e^{-(\Delta t - \varepsilon/\theta)^\beta} \quad (۹)$$

از آنجایی که  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^\beta} = 0$ ، بنابراین

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\{N(\Delta t) \leq 1\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - e^{-(\Delta t - \varepsilon/\theta)^\beta} + e^{-(\Delta t/\theta)^\beta} \right) = 1 \quad (۱۰)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

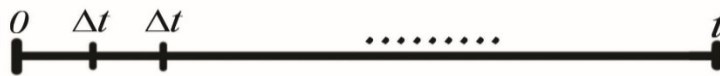
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\{N(\Delta t) \geq 2\} = 1 - 1 = 0$$

(۱۱)

بنابراین احتمال رخداد بیش از یک اتفاق، در یک فاصله زمانی کوچک به اندازه  $\Delta t$  در توزیع وایبل، برابر با ۰ است.

قضیه ۲: با فرض آن که زمان بین دو خرابی بر مبنای توزیع وایبل باشد، سیستم از خاصیت مارکوفی برخوردار است.

اثبات: فرض کنید برای محاسبه قابلیت اطمینان یک سیستم در بازه زمانی  $(0, T)$ ، این بازه زمانی را به قسمت‌های کوچکی مانند  $\Delta t$ ، تقسیم می‌کنیم که  $\Delta t \rightarrow 0$  است و لذا در هیچ یک از این بازه‌های کوچک زمانی، دو رویداد اتفاق نمی‌افتد.



شکل ۴: یک شمای تصویری از تقسیم یک بازه زمانی به بخش‌های کوچک

در این شرایط اگر  $k$  به عنوان یک عدد مثبت در نظر گرفته شود، در این صورت تعداد اجزای خراب در زمان  $k\Delta t$  با  $S_{k\Delta t}$  نمایش داده می‌شود که همان وضعیت سیستم است. در این شرایط، وضعیت سیستم به یکی از شرایط زیر بستگی دارد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر در این مرحله خرابی رخ ندهد} \\ \text{اگر یک خرابی روی دهد} \end{array} \right.$$

این بدان معنی است که  $S_{k\Delta t}$  فقط به  $S_{(k-1)\Delta t}$  بستگی دارد. یعنی تعداد خرابی‌ها در هر مرحله، تنها به یک مرحله قبل از آن بستگی داشته و به مراحل قبل تر از وابسته نیست.



در نتیجه، مطابق قضایای ۱ و ۲، این فرآیند مارکوف بوده و در نتیجه، دیاگرام حالت نمایش داده شده در شکل ۲ معتبر است. لذا مطابق شکل ۱، معادلات دیفرانسیل سیستم پیشنهادی به فرم زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} \text{stage}(n): \quad P'_{(n)}(t) = -n.\lambda.t^\gamma.P_{(n)}(t) \\ \text{stage}(n-1): \quad P'_{(n-1)}(t) = n.\lambda.t^\gamma.P_{(n)}(t) - (n-1).\lambda.t^\gamma.P_{(n-1)}(t) \\ \text{stage}(n-2): \quad P'_{(n-2)}(t) = (n-1).\lambda.t^\gamma.P_{(n-1)}(t) - (n-2).\lambda.t^\gamma.P_{(n-2)}(t) \\ \vdots \\ \text{stage}(1): \quad P'_{(1)}(t) = 2.\lambda.t^\gamma.P_{(2)}(t) - \lambda.t^\gamma.P_{(1)}(t) \end{array} \right\} \quad (12)$$

از طریق حل این معادلات که در رابطه (۱۲) قابل مشاهده است، پایایی سیستم پیشنهادی می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$P_n(t) = e^{-\frac{n}{\gamma+1}.\lambda.t^{\gamma+1}} \quad (13)$$

$$R(t) = \sum_{k=1}^n P_{(k)}(t) = n! \lambda^n \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{i\lambda}{\gamma+1}t^{\gamma+1}}}{i \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{j\lambda - i\lambda\}} = n! \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{i\lambda}{\gamma+1}t^{\gamma+1}}}{i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{j - i\}} \quad (14)$$

معتبر سازی رابطه به دست آمده برای توزیع وایبل از طریق تئوری احتمال در این قسمت، اعتبار رابطه به دست آمده برای تابع پایایی توزیع وایبل که در قسمت قبل محاسبه شد، بررسی می شود. برای این کار از روابط اصل احتمال استفاده می کنیم. می دانیم نرخ خرابی هر یک از اجزای تشکیل دهنده سیستم بر مبنای توزیع وایبل بوده و این اجزا به صورت موازی به هم متصلند. با توجه به این که این اجزاء یکسان هستند، لذا طول عمر این زیر سیستم تحت سیاست فعال برابر با بیشینه طول عمر اجزاء است. برای درک بهتر، زیر سیستمی را با  $n$  جزء یکسان با نرخ خرابی هایی بر مبنای توزیع وایبل در نظر بگیرید. اگر

هریک از اجزاء را  $T_i$  نظر بگیریم، تابع نرخ خرابی هر یک از آنها به صورت  $h(t) = \lambda t^\gamma$  خواهد بود.

در این صورت اگر  $R_c(t)$  و  $F_c(t)$  به ترتیب توابع پایایی و توزیع تجمعی هر یک از اجزاء باشند و  $R(t)$  و  $F(t)$  به ترتیب توابع پایایی و توزیع تجمعی مربوط به زیر سیستم باشند، در نتیجه با توجه به مفاهیم احتمال داریم:

$$R_c(t) = e^{-\int_{\theta=0}^t h(\theta)d\theta} = e^{-\int_{\theta=0}^t \lambda \theta^\gamma d\theta} = e^{-\frac{\lambda}{\gamma+1} t^{\gamma+1}} = e^{-\frac{\lambda}{\gamma+1} t^{\gamma+1}} \quad (15)$$

با توجه به این که این زیر سیستم تحت سیاست فعال مشغول به کار است، بنابراین عمر این زیر سیستم برابر است با بیشینه عمر اجزای آن یعنی  $T = \max(T_i)$ . در این صورت خواهیم داشت:

$$R(t) = 1 - \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma+1} t^{\gamma+1}} \right)^n = 1 - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} e^{-\frac{i\lambda}{\gamma+1} t^{\gamma+1}} \quad (16)$$

در نهایت تابع پایایی سیستم می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$R(t) = \sum_{i=i}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} e^{-\frac{i\lambda}{\gamma+1} t^{\gamma+1}} \quad (17)$$

می توان ادعا کرد که روابط (۱۴) و (۱۷) یکسانند. بنابراین، رابطه (۱۴) معتبر بوده و به جواب دقیق رسیده است و این امر نشان دهنده آن است که می توان از فرآیند مارکوف در محاسبه تابع پایایی سیستم های وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل تحت سیاست فعال استفاده کرد. لذا در شرایط مواجهه با مفروضات پیچیده تر در سیستم های با نرخ خرابی وابسته به زمان، مانند سیستم هایی با نرخ خرابی های وابسته به تعداد اجزای در حال کار، امکان بهره گیری از توسعه فرآیند امکان پذیر است. در حالی که محاسبه پایایی این سیستم ها از طریق مفاهیم احتمال به راحتی امکان پذیر نمی باشد. در واقع در هنگام مواجهه با مفروضات پیچیده تر در سیستم های با نرخ خرابی وابسته به زمان، استفاده از مارکوف یا به

کارگیری شبیه‌سازی، تنها راهکارهای موجود جهت محاسبه تابع پایایی آن سیستم‌ها است.

### شبیه‌سازی

همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، برای محاسبه تابع پایایی سیستم‌های با نرخ خرابی وابسته به زمان از شبیه‌سازی استفاده می‌شود. اگرچه با توجه به ارائه رابطه (۱۴) که به صورت صریح و دقیق به دست آمده است دیگر نیازی به استفاده از شبیه‌سازی نیست، ولی به این دلیل در این مقاله از شبیه‌سازی نیز استفاده شده است که از طریق آن هم می‌توان یک مقایسه با روش پیشنهادی بر مبنای مارکوف داشت و هم می‌توان نشان داد که مسیر رسیدن به یک تابع تخمینی برای محاسبه پایایی از طریق شبیه‌سازی تا چه اندازه زمان‌بر است. با توجه به این که توزیع وایبل دارای خاصیت بی‌حافظگی نیست، بنابراین این امر باید در روند شبیه‌سازی مورد توجه قرار بگیرد. برای این کار، استفاده از تابع پایایی شرطی بسیار مناسب به نظر می‌رسد. این تابع، پایایی یک سیستم را وقتی تا لحظه  $T_0$  کار کرده باشد مطابق رابطه (۱۸) محاسبه می‌کند.

$$R\left(\frac{t}{T_0}\right) = e^{-\int_{T_0}^{T_0+t} h(\theta).d\theta} \quad (18)$$

با توجه به این که نرخ خرابی اجزای سیستم پیشنهادی به صورت وابسته به زمان و بر مبنای توزیع وایبل در نظر گرفته شده است، در نتیجه برای محاسبه پایایی سیستم پیشنهادی باید از تابع پایایی شرطی توزیع وایبل استفاده شود.

$$R(t/T_0) = \exp\left\{\left(\frac{T_0}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t+T_0}{\theta}\right)^\beta\right\} \quad (19)$$

هیچنین، معکوس تابع فوق خواهد شد:

$$R(t) = e^{\left(\frac{T_0}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t+T_0}{\theta}\right)^\beta}$$

$$\ln R(t) = \left(\frac{T_0}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t+T_0}{\theta}\right)^\beta \rightarrow \left(\frac{t+T_0}{\theta}\right)^\beta = \left\{-\ln R(t) + \left(\frac{T_0}{\theta}\right)^\beta\right\}^{1/\beta} \quad (20)$$

$$t = \theta \left\{ \left( \frac{T_0}{\theta} \right)^\beta - \text{Ln}R(t) \right\}^{1/\beta} - T_0$$

(۲۱)

جزئیات فرآیند شبیه‌سازی بدین صورت است که نخست، پارامترهای مورد نیاز شبیه‌سازی وارد می‌شوند. این پارامترها شامل تعداد اجزای سیستم، پارامترهای شکل و مقیاس توزیع وایبل، افق زمانی مورد انتظار و تعداد تکرارهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی هستند. سپس، تعداد اجزای سالم سیستم در هر مرحله محاسبه شده و به تعداد آن، اعداد تصادفی بر مبنای توزیع یکنواخت در بازه ۰ تا ۱ تولید می‌شوند. این اعداد تصادفی، در تابع پایایی شرطی معکوس که مطابق رابطه (۲۱) برای توزیع وایبل محاسبه شده است جایگذاری می‌شوند. نتایج به دست آمده معادل طول عمر هر یک از اجزایی هستند که در سیستم مشغول به کارند. کمترین مقدار از این اعداد، معادل طول عمر سیستم در آن مرحله در نظر گرفته می‌شود و این عدد به طول عمر سیستم در مرحله قبل اضافه می‌شود. تا زمانی که این مقدار از افق زمانی مورد انتظار بیشتر باشد، مراحل ذکر شده ادامه پیدا می‌کند. نهایتاً مقدار پایایی سیستم از تقسیم تعداد فرآیند حلقه اجرا شده بر تعداد کل تکرارهای در نظر گرفته شده (*num/iter*) تخمین زده می‌شود. گام‌های فرآیند شبیه‌سازی در شکل ۵ قابل مشاهده است.

#### A. Estimating the subsystem reliability with an active strategy

- ❖ Set  $n, \theta, \beta, t$ , iteration
- ❖ Set  $num=0$
- ❖ For  $j$  from 1 to iteration
  - Set  $T_0 = 0$
- ❖ For  $i$  from 1 to  $n$ 
  - Set  $m = n - i + 1$
- ❖ For  $k$  from 1 to  $m$ 
  - Set  $r \sim \text{uniform}(0,1)$
  - Set  $T_k = \theta^\beta \sqrt{\left( \left( \frac{T_0}{\theta} \right) - \text{Ln}(R) \right)} - T_0$
- ❖ End For
- ❖ Set  $T_0 = T_0 + \min\{T_k\}$
- ❖ End For
- ❖ If  $T_0 > t$
- ❖ Set  $num = num + 1$
- ❖ End If
- ❖ End For
- ❖ Calculate subsystem reliability by  $R = \frac{num}{iteration}$

شکل ۵. شبه کد فرآیند شبیه سازی

#### مثال عددی

به منظور نشان دادن کاربردهای متدولوژی پیشنهادی، چند مثال عددی در این بخش ارائه شده است. سیستمی را متشکل از  $n$  جزء یکسان که به صورت موازی به یکدیگر متصلند را در نظر بگیرید. نرخ خرابی اجزای تشکیل دهند این سیستم بر مبنای توزیع وایبل در نظر گرفته شده است. برای این منظور، مقادیر ورودی شامل تعداد اجزای سیستم، و پارامترهای توزیع وایبل از پورکریم گیلانی و همکاران (۲۰۱۶) اقتباس شده است که در جدول ۱ قابل

مشاهده است. برنامه کامپیوتری برای هر دو روش پیشنهادی در نرم افزار متلب<sup>۱</sup> نوشته شده است.

جدول ۱. حدود بالا و پایین پارامترهای ورودی برای مثال عددی

	حد پایین	حد بالا
تعداد اجزای زیرسیستم ( $n$ )	1	7
پارامتر شکل توزیع وایبل ( $\beta$ )	0.8	1.25
پارامتر مقیاس توزیع وایبل ( $\theta$ )	100	200

به منظور طراحی مثال‌های عددی بر مبنای جدول ۱، از هفت سطح برای تعداد اجزای در حال کار سیستم، سه سطح برای پارامتر شکل و شش سطح برای پارامتر مقیاس توزیع وایبل استفاده شده است. بنابراین با توجه به اصل ضرب در احتمالات، تعداد آزمایش ۱۲۶ آزمایش عددی جهت پیاده سازی فرآیند پیشنهادی تولید شده است. این آزمایش‌ها به همراه نتایج آن‌ها در جدول ۲ قابل مشاهده است.

جدول ۲. مقادیر ورودی آزمایش‌ها و نتایج به دست آمده از آن‌ها

Exp	n	A	b	R(sim)	time(s)	R(pro)	Exp	n	A	b	R(sim)	time(s)	R(pro)
1	1	0.8	100	0.3678	1.8296	0.3679	64	4	1.025	160	0.9551	9.079	0.9549
2	1	0.8	120	0.4214	1.8735	0.4214	65	4	1.025	180	0.9687	9.1365	0.9684
3	1	0.8	140	0.4652	1.8185	0.4658	66	4	1.025	200	0.9772	9.1797	0.9773
4	1	0.8	160	0.5033	1.8005	0.5033	67	4	1.25	100	0.8406	9.3988	0.8403
5	1	0.8	180	0.5352	1.8355	0.5353	68	4	1.25	120	0.9093	9.0438	0.9092
6	1	0.8	200	0.563	1.842	0.5631	69	4	1.25	140	0.946	9.0246	0.9463
7	1	1.025	100	0.3679	1.8317	0.3679	70	4	1.25	160	0.967	9.1246	0.967
8	1	1.025	120	0.4364	1.818	0.4362	71	4	1.25	180	0.979	9.0521	0.9789
9	1	1.025	140	0.4926	1.8057	0.4925	72	4	1.25	200	0.9864	9.2906	0.9861
10	1	1.025	160	0.5394	1.7949	0.5392	73	5	0.8	100	0.8994	11.4023	0.8991
11	1	1.025	180	0.5785	1.8288	0.5784	74	5	0.8	120	0.9349	11.4461	0.9351
12	1	1.025	200	0.6116	1.8585	0.6118	75	5	0.8	140	0.9567	11.6266	0.9565
13	1	1.25	100	0.3678	2.0395	0.3679	76	5	0.8	160	0.9694	11.7128	0.9698
14	1	1.25	120	0.4511	1.8161	0.451	77	5	0.8	180	0.9782	11.8877	0.9783

Exp	n	A	b	R(sim)	time(s)	R(pro)	Exp	n	A	b	R(sim)	time(s)	R(pro)
15	1	1.25	140	0.5187	1.87148	0.5186	78	5	0.8	200	0.984	11.5041	0.9841
16	1	1.25	160	0.5737	1.9918	0.5737	79	5	1.025	100	0.8995	12.2827	0.8991
17	1	1.25	180	0.6191	1.8582	0.619	80	5	1.025	120	0.9432	11.5888	0.9431
18	1	1.25	200	0.6567	1.9622	0.6568	81	5	1.025	140	0.9664	11.4571	0.9663
19	2	0.8	100	0.6006	4.5554	0.6004	82	5	1.025	160	0.9796	11.6701	0.9792
20	2	0.8	120	0.6652	4.4912	0.6652	83	5	1.025	180	0.9866	11.5807	0.9867
21	2	0.8	140	0.7145	4.4453	0.7146	84	5	1.025	200	0.9912	12.086	0.9912
22	2	0.8	160	0.7536	4.2826	0.7533	85	5	1.25	100	0.8995	11.6842	0.8991
23	2	0.8	180	0.7842	4.549	0.7841	86	5	1.25	120	0.9498	11.5146	0.9501
24	2	0.8	200	0.8089	4.3323	0.8091	87	5	1.25	140	0.9742	11.5488	0.9741
25	2	1.025	100	0.6008	4.4699	0.6004	88	5	1.25	160	0.9859	11.7759	0.9859
26	2	1.025	120	0.6824	4.4794	0.6822	89	5	1.25	180	0.9919	11.5558	0.992
27	2	1.025	140	0.7421	4.9067	0.7424	90	5	1.25	200	0.9955	11.5407	0.9952
28	2	1.025	160	0.7871	4.9132	0.7876	91	6	0.8	100	0.9365	14.4585	0.9362
29	2	1.025	180	0.8228	4.9454	0.8223	92	6	0.8	120	0.9629	14.3178	0.9625
30	2	1.025	200	0.8494	4.667	0.8493	93	6	0.8	140	0.9764	13.9317	0.9768
31	2	1.25	100	0.6004	4.6813	0.6004	94	6	0.8	160	0.9855	13.673	0.985
32	2	1.25	120	0.698	4.2798	0.6986	95	6	0.8	180	0.99	14.0057	0.9899
33	2	1.25	140	0.7682	4.2568	0.7682	96	6	0.8	200	0.9931	14.0256	0.993
34	2	1.25	160	0.8189	4.3077	0.8182	97	6	1.025	100	0.9365	14.0952	0.9362
35	2	1.25	180	0.8549	4.3008	0.8548	98	6	1.025	120	0.9678	14.0731	0.9679
36	2	1.25	200	0.8827	4.3536	0.8822	99	6	1.025	140	0.9827	13.7676	0.9829
37	3	0.8	100	0.7476	6.598	0.7474	100	6	1.025	160	0.9909	13.861	0.9904
38	3	0.8	120	0.8064	6.6058	0.8063	101	6	1.025	180	0.994	13.717	0.9944
39	3	0.8	140	0.8476	6.6289	0.8476	102	6	1.025	200	0.9965	14.0374	0.9966
40	3	0.8	160	0.8776	6.5959	0.8774	103	6	1.25	100	0.9362	15.0624	0.9362
41	3	0.8	180	0.8995	6.8549	0.8997	104	6	1.25	120	0.9721	14.4326	0.9726
42	3	0.8	200	0.9164	7.4401	0.9166	105	6	1.25	140	0.988	14.0359	0.9876
43	3	1.025	100	0.7471	6.4845	0.7474	106	6	1.25	160	0.9945	13.8976	0.994
44	3	1.025	120	0.82	6.4775	0.8208	107	6	1.25	180	0.997	13.8484	0.9969
45	3	1.025	140	0.8693	6.4974	0.8693	108	6	1.25	200	0.9986	13.962	0.9984
46	3	1.025	160	0.9024	6.4924	0.9021	109	7	0.8	100	0.9598	16.1366	0.9597
47	3	1.025	180	0.9254	7.1627	0.9251	110	7	0.8	120	0.9782	16.3418	0.9783
48	3	1.025	200	0.9418	6.5276	0.9415	111	7	0.8	140	0.9871	16.5658	0.9876

Exp	n	A	b	R(sim)	time(s)	R(pro)	Exp	n	A	b	R(sim)	time(s)	R(pro)
49	3	1.25	100	0.7472	6.8039	0.7474	112	7	0.8	160	0.9922	16.6152	0.9925
50	3	1.25	120	0.8345	6.9927	0.8346	113	7	0.8	180	0.9951	16.2423	0.9953
51	3	1.25	140	0.8884	6.9273	0.8884	114	7	0.8	200	0.997	16.385	0.997
52	3	1.25	160	0.9228	6.7151	0.9225	115	7	1.025	100	0.9596	16.1804	0.9597
53	3	1.25	180	0.9441	6.7006	0.9447	116	7	1.025	120	0.9818	16.2187	0.9819
54	3	1.25	200	0.9597	6.7178	0.9596	117	7	1.025	140	0.9915	16.4353	0.9913
55	4	0.8	100	0.8407	9.2561	0.8403	118	7	1.025	160	0.9955	16.2296	0.9956
56	4	0.8	120	0.8872	11.2649	0.8879	119	7	1.025	180	0.9975	16.5802	0.9976
57	4	0.8	140	0.9185	9.0806	0.9186	120	7	1.025	200	0.9988	16.4263	0.9987
58	4	0.8	160	0.9396	8.945	0.9391	121	7	1.25	100	0.9595	16.2546	0.9597
59	4	0.8	180	0.9533	9.1636	0.9534	122	7	1.25	120	0.985	17.3806	0.985
60	4	0.8	200	0.9633	9.2962	0.9636	123	7	1.25	140	0.994	16.3224	0.994
61	4	1.025	100	0.8401	9.1896	0.8403	124	7	1.25	160	0.9973	16.3633	0.9974
62	4	1.025	120	0.899	9.2351	0.899	125	7	1.25	180	0.9988	16.7783	0.9988
63	4	1.025	140	0.9332	9.2933	0.9337	126	7	1.25	200	0.9994	17.3336	0.9994

مطابق جدول ۲، نتایج حاصل شده از هر دو روش تقریباً با یکدیگر برابر است. ولی این در حالی است که فرآیند شبیه سازی نیازمند طی زمان قابل ملاحظه‌ای برای رسیدن به جواب است؛ در حالی که روش پیشنهادی فوراً به جواب می‌رسد. اما برای مقایسه عملکرد دو روش از نظر زمانی، فرض برابری میانگین‌های زمان دو روش، در سطح  $\alpha = 0.05$  به فرم زیر مورد مقایسه قرار گرفته‌اند:

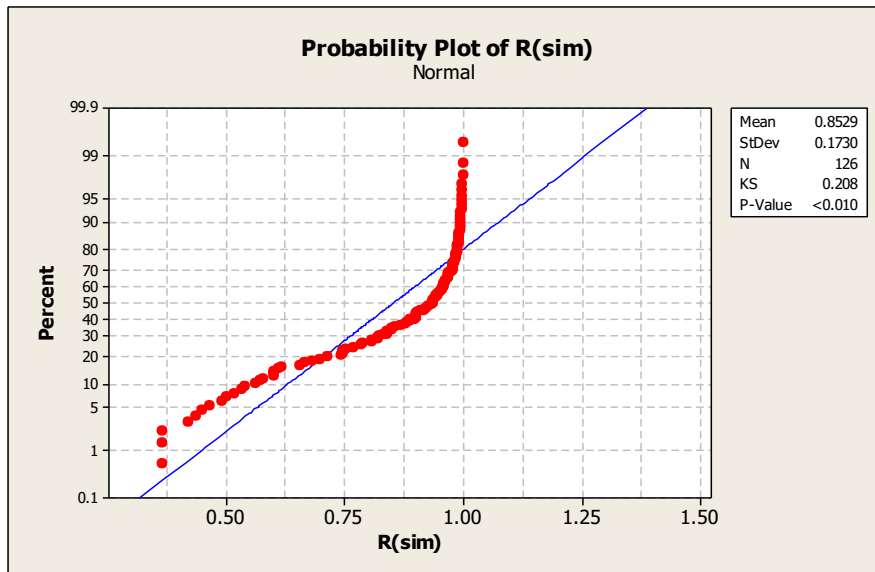
$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{simulation time}} = \mu_{\text{time of proposed method}} \\ H_a : \mu_{\text{simulation time}} \neq \mu_{\text{time of proposed method}} \end{cases}$$

برای این کار ابتدا تست نرمال بودن بر روی نتایج به دست آمده از هر دو روش از طریق آزمون کولموگروف-اسمیرنوف و در نرم‌افزار Minitab 16 انجام شد که نتایج حاصل از این آزمون در شکل‌های ۶ و ۷ قابل مشاهده است. مطابق این شکل‌ها، مقدار p-value در هر دو آزمون کمتر از ۰,۰۱ است و این بدان معنی است که فرض نرمال بودن برقرار نبوده و برای مقایسه دو روش باید از آزمون‌های ناپارامتریک استفاده کرد. از این رو، از آزمون من-ویتنی<sup>۱</sup> برای مقایسه دو روش استفاده شده است که نتایج آن در جدول ۳

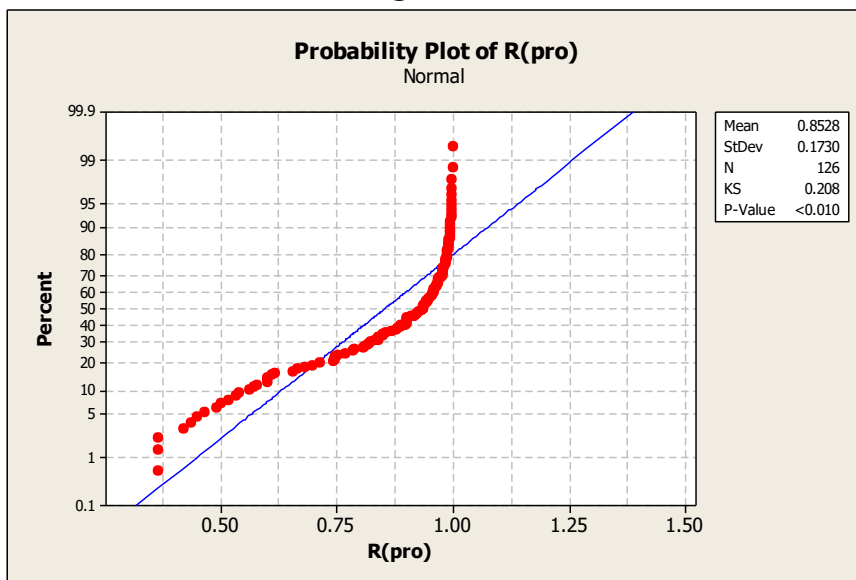
<sup>۱</sup> Mann-Whitney



آمده است. مطابق این نتایج، سطح معناداری آزمون برابر با ۰,۹۸۹۷ بوده و این یعنی فرض صفر رد نمی‌شود و در زمان حاصل از دو روش اختلاف قابل ملاحظه‌ای وجود داشته، بنابراین روش پیشنهادی جدید در محاسبه پایایی سیستمی متشکل از اجزای با نرخ خرابی وابسته به زمان بر مبنای توزیع وایبل، روشی مناسب تر است.



شکل ۶. بررسی فرض نرمال بودن نتایج به دست آمده از شبیه سازی



شکل ۷. بررسی فرض نرمال بودن نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی

جدول ۳. آزمون من-ویننی برای مقایسه دو روش

	N	Median	is not rejected $H_0$
simulation	126	0.93555	
proposed method	126	0.93565	
Point estimate for ETA1-ETA2 is 0.00000			
95.0 Percent CI for ETA1-ETA2 is (-0.01680,0.01681)			
W = 15947.0			
Test of ETA1 = ETA2 vs ETA1 not = ETA2 is significant at 0.9897			
The test is significant at 0.9897 (adjusted for ties)			

Source	DF	SS	MS	F	P-value
Factor	1	5365.8	5365.8	450.51	0.000
Error	250	2977.6	11.9		
Total	251	8343.4			
S = 3.451, R-Sq = 64.31%, R-Sq(adj) = 64.17%					

### نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

با توجه به این واقعیت که بهینه‌سازی پایایی یکی از دغدغه‌های مهم مدیران صنعتی است لذا در نظر گرفتن شرایطی که مسائل آکادمیک را به جهان واقعیت نزدیک‌تر می‌کند می‌تواند بسیار جذاب باشد. به همین دلیل، این مقاله به بررسی سیستم‌هایی پرداخت که نرخ خرابی اجزای تشکیل دهنده آن به صورت وابسته به زمان و بر مبنای توزیع وایبل هستند. از آنجایی که توزیع وایبل دارای خاصیت بی‌حافظگی نیست، لذا پیش از این، محاسبه تابع پایایی برای آن به صورت روابط صریح ریاضی امکان‌پذیر نبود. ولی با در نظر گرفتن برخی مفروضات طی این تحقیق، برای اولین بار اقدام به ارائه یک رابطه ریاضی دقیق به منظور محاسبه تابع پایایی سیستمی با شرایط مذکور شد. بدین گونه که از طریق ایجاد شرایط قابل قبول، از طریق به کار گیری قضیه مارکوف، به دست آوردن دستگاه معادلات دیفرانسیل سیستم و حل این معادلات، یک رابطه جدید برای تابع پایایی سیستم ارائه شد. نهایتاً به منظور اعتبارسنجی تابع پیشنهادی از شبیه‌سازی استفاده شد و دو روش با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج نشان داد که نه تنها استفاده از مارکوف در محاسبه پایایی سیستم‌های با

سیاست فعال و نرخ‌های خرابی وابسته به زمان امکان‌پذیر است، بلکه دارای این مزیت است که می‌توان آن را برای سیستم‌هایی با مفروضات پیچیده‌تر نیز توسعه داد. در حالی که استفاده از روابط به دست آمده از اصل احتمال برای آن سیستم‌ها امکان‌پذیر نیست. همچنین، استفاده از مارکوف مزیت دیگری نیز در مقایسه با شبیه‌سازی داشته و آن این است که منجر به داشتن جوابی دقیق در زمان کوتاه‌تر شده در حالی که استفاده از شبیه‌سازی نیاز به طراحی سیستم، طراحی و پیاده‌سازی آزمایش‌ها و تخمین تابع به صورت ضمنی داشته که این فرآیند، زمان زیادی صرف کرده و منجر به داشتن جواب تقریبی نادقیق خواهد شد.

برای تحقیقات آتی در این حوزه، پیشنهادات زیر ارائه می‌شوند:

- بررسی سیستم‌هایی با شرایط مذکور تحت سیاست آماده به کار
- در نظر گرفتن اجزای تعمیرپذیر در سیستم
- در نظر گرفتن نرخ‌های خرابی اجزاء به صورت احتمالی یا فازی
- به کارگیری تابع پایایی این سیستم در مسئله تخصیص افزونگی به منظور توسعه کاربردهای آن
- در نظر گرفتن اجزاء به صورت غیر یکسان برای مدل پیشنهادی و بررسی تابع پایایی آن

## References

- Banjevic D, Jardine AK. *Calculation of reliability function and remaining useful life for a Markov failure time process. IMA journal of management mathematics.* 2006 Apr 1;17(2):115-30.
- Carrasco JM, Ortega EM, Cordeiro GM. *A generalized modified Weibull distribution for lifetime modeling. Computational Statistics and Data Analysis* 2008; 53(2):450-462.
- Coit DW, Smith AE. *Genetic algorithm to maximize a lower-bound for system time-to-failure with uncertain component Weibull parameters. Computers and Industrial Engineering* 2002; 28;41(4):423-440.
- Elmahdy EE, Aboutahoun AW. *A new approach for parameter estimation of finite Weibull mixture distributions for reliability modeling. Applied Mathematical Modelling* 2013; 37(4):1800-1810.
- Eryilmaz S. *Reliability of a k-out-of-n system equipped with a single warm standby component. IEEE Transactions on Reliability* 2013; 62(2):499-503.
- Fazlollahtabar H, Saidi-Mehrabad M, Balakrishnan J. *Integrated Markov-neural reliability computation method: A case for multiple automated guided vehicle system. Reliability Engineering & System Safety.* 2015; 135:34-44.
- Flammini F, Marrone S, Mazzocca N, Vittorini V. *A new modeling approach to the safety evaluation of N-modular redundant computer systems in presence of imperfect maintenance. Reliability Engineering and System Safety* 2009; 94(9):1422-1432.
- Gray JN. *Continuous-time Markov methods in the solution of practical reliability problems. Reliability engineering* 1985; 11(4):233-52.
- Guilani PP, Azimi P, Niaki ST, Niaki SA. *Redundancy allocation problem of a system with increasing failure rates of components based on Weibull distribution: A simulation-based optimization approach. Reliability Engineering and System Safety* 2016; 152:187-96.
- Guilani PP, Sharifi M, Niaki ST, Zaretalab A. *Reliability evaluation of non-reparable three-state systems using Markov model and its comparison with the UGF and the recursive methods. Reliability Engineering and System Safety* 2014; 129:29-35.

- Hisada K, Arizino F. Reliability tests for Weibull distribution with varying shape-parameter, based on complete data. *IEEE transactions on Reliability* 2002 ;51(3):331-336.
- Huang CC, Yuan J. A two-stage preventive maintenance policy for a multi-state deterioration system. *Reliability Engineering and System Safety* 2010; 95(11):1255-60.
- Huang L, Xu Q. Lifetime reliability for load-sharing redundant systems with arbitrary failure distributions. *IEEE Transactions on Reliability* 2010; 59(2):319-330.
- Jiang P, Lim JH, Zuo MJ, Guo B. Reliability estimation in a Weibull lifetime distribution with zero-failure field data. *Quality and Reliability Engineering International* 2010; 26(7):691-701.
- Landon J, Özekici S, Soyer R. A Markov modulated Poisson model for software reliability. *European Journal of Operational Research*. 2013; 229(2):404-10.
- Mendes, A.A., D.W. Coit, and J.L.D. Ribeiro, Establishment of the optimal time interval between periodic inspections for redundant systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014. 131: p. 148-165.
- Montoro-Cazorla D, Pérez-Ocón R. Constructing a Markov process for modeling a reliability system under multiple failures and replacements. *Reliability Engineering & System Safety*. 2018 (in press).
- Nadarajah S, Kotz S. On some recent modifications of Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability* 2005; 54(4):561-562.
- Nourelfath M, Châtelet E, Nahas N. Joint redundancy and imperfect preventive maintenance optimization for series-parallel multi-state degraded systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2012; 103:51-60.
- Peng X, Yan Z. Estimation and application for a new extended Weibull distribution. *Reliability Engineering and System Safety* 2014; 121:34-42.
- Pham H, Lai CD. On recent generalizations of the Weibull distribution. *IEEE transactions on reliability* 2007; 56(3):454-8.
- Ross, SM. *A first course in probability*. Pearson 2014.
- Soro IW, Nourelfath M, Ait-Kadi D. Performance evaluation of multi-state degraded systems with minimal repairs and imperfect preventive maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2010; 95(2):65-69.

- Wang Z, Mourelatos ZP, Li J, Baseski I, Singh A. Time-dependent reliability of dynamic systems using subset simulation with splitting over a series of correlated time intervals. Journal of Mechanical Design. 2014;136(6):061008.*
- Wu S, Zhang L, Lundteigen MA, Liu Y, Zheng W. Reliability assessment for final elements of SISs with time dependent failures. Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2018;51:186-99.*