

Content Analysis the Process of Constructing Variable and Algebraic Expressions Concepts of 7th Grade's Mathematical Book

Fatemeh Zahra Heidari 

Ph.D. Student in Mathematics Education, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. E-mail: zahra.heidari@gmail.com

Nasim Asghari 

Corresponding Author, Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. E-mail: Nas.Asghari@iauctb.ac.ir

Ali Delavar 

Professor, Department of Educational Measuring, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran. E-mail: dr.delavarali@gmail.com

Abstract

This research examined the construction of algebraic concepts in the 3rd chapter of the 7th-grade mathematics textbook, utilizing Sfard's and Tall's theoretical frameworks. Content analysis was employed to achieve the research's goal of understanding the process by which algebraic concepts are developed in the context of the specified curriculum. This particular research design is considered to be qualitative and focused on the development of educational content, rather than empirical in nature. This study, in terms of its purpose and design, falls under the applied research and non-experimental groups respectively. The chapter in question covers four sections, namely numerical patterns, algebraic expressions, numerical values of algebraic expressions, and equations. This study investigated the process of constructing algebraic concepts, specifically variables and algebraic expressions, utilizing the theoretical frameworks of Sfard and Tall. The research findings suggest that the educational process of algebraic concepts in the textbook tends to follow an accelerated timeline which skips or overlooks the condensation stage (the second stage in the concept development process) and quickly transitions to the reification stage (3rd point in the concept development process). In some instances, the entire condensation stage may even be bypassed, leading to

How to Cite: Heidari, F. Z., Asghari, N., & Delavar, A. (2023). Content Analysis the Process of Constructing Variable and Algebraic Expressions Concepts of 7th Grade's Mathematical Book. *Quarterly of Educational Measurement*, 14(53), 58-79. <https://doi.org/10.22054/jem.2023.44711.1941>



Educational Measurement is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

insufficiently developed and understood mathematical concepts and subsequent learning difficulties. Additionally, the research findings are consistent with the theories of concept development proposed by Gray and Tall. Specifically, the construction of the concept has remained at the procedural stage and has not reached the final stage. As such, it is evident that the students have not developed a structural understanding of variables and algebraic expressions.

Keywords: algebra, variable, algebraic expressions, Sfard's theoretical, Gray & Tall theoretical

1. Introduction

Though algebra is a branch of mathematics dedicated to the representation and generalization of numerical relationships and mathematical structures, along with operations on these structures, it has different definitions and uses depending on the individual. According to Kieran, algebra deals with symbolizing and generalizing such structures and their related operations, whereas Capute argues that this mathematical domain cannot be precisely defined and may vary from person to person. Since the introduction to algebraic concepts such as variables and algebraic expressions usually occur for the first time in 7th grade, these concepts need to be covered effectively and appropriately in textbooks. The way in which textbook authors navigate and teach these concepts is critical, as a strong understanding of these concepts is foundational in the field of mathematics and beyond.

Knowing the origins of students' difficulties not only helps teachers to gain a better understanding of the students themselves, but also allows them to identify areas for remediation and improvement. This information provides insight into the students' thought process, the specific mistakes they are prone to making, and the areas where they may need additional support and instruction. This study's objective was to explore the formation of the variable and algebraic expression concepts from the perspectives of various theoretical frameworks, particularly the Sfard and Gray & Tall models. Additionally, it was determined that recent changes to the Iranian math curriculum, including the writing of a new 7th-grade mathematics textbook, prompted a review of the instruction and explanation of algebra and algebraic concepts in the third chapter. Furthermore, there is evidence that this subject has been introduced in a new way that differs from previous versions. The textbook is the primary teaching mechanism in math class, so it is essential to examine its contents thoroughly. Doing

so can provide teachers with valuable insight regarding students' weaknesses and challenges, which in turn can be used to guide remediation efforts and improve performance levels. Therefore, the objective of this research is to answer the following question: Does the construction of variable concepts and algebraic expressions in the 7th-grade textbook adhere to the concepts-construction theories of Sfard (1991) and Gray & Tall (1994)?.

2. Literature Review

It is worth noting that Warren (2003) also employed a written exam in his research to assess students' understanding of the concept of variable. Then, he also carried out semi-structured interviews with the students. The results of both the written exams and interview tools in Warren's study are consistent with Kuchman's (1981) levels of understanding of the concept of variable, which indicates that the majority of students perceived a variable as a specific unknown number or generalized number. In addition, Trinidad and Ursini (2003) developed a model based on Kochman's (1981) work and employed it in the design of educational materials. They asserted that in order for students to master the concept of variable, they need to be able to comprehend the various ways in which variables are applied in multi-step problems across different components. Several studies on students' challenges in understanding algebraic expressions have been conducted, the results of which have demonstrated that students' difficulty in comprehending variables and arithmetic expressions tend to be the sources of their challenges. Additionally, the studies have identified specific misconceptions that can contribute to this difficulty, such as misunderstandings of variable and arithmetic concepts.

3. Methodology

This study took an interpretative approach utilizing the content analysis method and is thus categorized as qualitative in nature. It was also of an applied nature in terms of its aims and research design. The research analyzed the activities outlined in the third chapter of the 7th-grade math textbook from the perspectives of Sfard and Tall's theoretical frameworks. Due to the changes implemented to Iran's curriculum and mathematics textbooks in 2013-2014, it has become crucial to examine the development of variable concepts and algebraic expressions. Since 7th graders are first introduced to algebraic concepts during this time, a

sample from this grade's textbook was selected for analysis in this study. The textbook in question features 9 chapters, including the third, which focuses on algebra and equations. Based on the study's objectives, activities from the two variable sections and algebraic expression sections within the chapter were analyzed via Sfard's (1991) and Tal's (1994) process-object-process-object model.

5. Conclusion

The study sought to investigate the construction process of the variable and algebraic expression concepts by leveraging Sfard's (1991) and Tall and Gray's (1994) theory of concept development. The findings were gathered via analyzing the textbook activities of the 7th grade math book and indicate that the new concept construction process has not been achieved correctly during the algebra chapter. In the case of the variable concept, the compression phase has not been thoroughly explored, leading to a rushed transition to the objectification stage. This may prevent the construction of the concept from occurring accurately, as Sfard (1991) asserts that the development of a new concept necessitates progression through internalization, compression, and objectification phases, before the concept is finally understood and comprehended as a true mathematical object. Considering that letters in different positions can assume varying meanings, the textbook's seventh-grade math chapter makes use of letters as variables. The textbook's description of a variable as a symbol to represent unknown numbers or unspecified values causes potential for misunderstandings. The findings of this study are consistent with those uncovered by Heydari and Asghari (2020), thus indicating the need for revision.

Regarding the concept of algebraic expression, the analysis of the activities revealed that the compression phase was absent, with the transition taking place between the internalization stage and the objectification stage. This suggests that the procedural understanding, which is regarded a prerequisite for structural comprehension, has been neglected. Furthermore, the findings align with those of Bashir and Yaphedian (2015) and Heydari and Asghiri (2016), respectively, indicating a lack of consistency in the concept development process. According to Foster (2007), if students are presented with abstract concepts without practical application, it will be difficult for them to find meaning. Not only does this lack of understanding result in false assumptions (pseudo-structural comprehension), but it can also lead to

procedural knowledge being retained or developed, which is insufficient. In order for students to comprehend the full essence of the concepts, both procedural and structural understanding must be developed concurrently. Completing the procedural understanding stage and progressing via the three intermediary steps, leads to accurate and comprehensive structural comprehension. Procedural knowledge, which can be defined as step-by-step skills and procedures for performing mathematical operations, is essential to avoiding misunderstandings that occur when students make inaccurate generalizations or allocate the wrong information, both of which impact their conceptual comprehension. Given the importance of grasping basic concepts like variables and algebraic expressions for learning more advanced concepts and developing algebraic skills, the text for the 7th grade math curriculum needs to establish a foundation from which students can build. It is anticipated that the findings of this study will serve as a guide for authors and curriculum planners for future revisions of the 7th-grade mathematics textbook. On a side note, it should be noted that the lack of a written curriculum detailing the learning objectives is a notable limitation to this research.

تحلیل محتوای کتاب درسی ریاضی پایه هفتم، از منظر فرآیند ساخت مفهوم متغیر و عبارات‌های جبری

فاطمه الزهرا

حیدری

دانشجوی ریاضیات تربیتی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران،
ایران. رایانامه: zahra.heidari@gmail.com

نسیم اصغری *

نویسنده مسئول، استادیار گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی،
تهران، ایران. رایانامه: zahra.heidari@gmail.com

علی دلاور

استاد گروه سنجش و اندازه‌گیری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران. رایانامه:
dr.delavarali@gmail.com

چکیده

هدف از پژوهش حاضر، بررسی نحوه ساخت مفهوم متغیر و عبارات‌های جبری، در کتاب درسی ریاضی پایه هفتم، بر اساس نظریه‌های ساخت مفهوم Sfard (1991) و Tall and Gray (1994) است. این تحقیق، با رویکرد تفسیری از نوع کیفی است. روش مورد استفاده، روش تحلیل محتوا است. از نظر هدف در گروه تحقیقات کاربردی و از نظر جمع‌آوری و کنترل متغیرها در گروه تحقیقات غیر آزمایشی قرار دارد. فصل سوم کتاب ریاضی پایه هفتم، شامل ۴ بخش الگوهای عددی، عبارات‌های جبری، مقدار عددی یک عبارت جبری و معادله است که این پژوهش به بررسی روند ساخت مفاهیم جبری در دو بخش متغیر و عبارات‌های جبری، می‌پردازد. یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که آموزش این دو مفهوم به گونه‌ای است که فرصت آموزشی لازم برای مرحله فشرده‌سازی (مرحله دوم ساخت مفهوم) پیش‌بینی نشده است و این مرحله، اغلب حذف شده است. همچنین در روند آموزشی، فرصت عبور از مرحله فشرده‌سازی به مرحله شی‌انگاری (مرحله سوم) فراهم نشده است. بنا بر نظریه گری و تال، ساخت مفهوم در مرحله رویه مانده و به مرحله آخر یعنی درک مفهوم نرسیده است؛ بنابراین با توجه به نظریه‌های ساخت مفهوم، مراحل درک ساختاری و مفهومی برای متغیر و عبارات‌های جبری در نگارش کتاب درسی پیش‌بینی نشده است.

کلیدواژه‌ها: جبر، متغیر، نظریه اسفارد، نظریه گری و تال

استناد به این مقاله: رحیمی، فاطمه الزهرا، اصغری، نسیم، و دلاور، علی. (۱۴۰۲). تحلیل محتوای کتاب درسی ریاضی پایه هفتم، از منظر فرآیند ساخت مفهوم متغیر و عبارات‌های جبری. فصلنامه اندازه‌گیری تربیتی، ۱۴(۵۳)، ۵۸-۷۹. <https://doi.org/10.22054/jem.2023.44711.1941>



Educational Measurement is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

مقدمه

جبر یکی از مجردترین شاخه‌های ریاضیات است که بخش اعظم ریاضیات مدرسه‌ای را تشکیل می‌دهد. بنا به اعتقاد Kaput (2008) جبر را نمی‌توان به‌طور یکسان برای همه تعریف کرد. این شاخه از دانش ریاضیات، یک مفهوم اساسی و گسترده است که در سیر تاریخ تکامل یافته و ممکن است در آینده تشریح شود و یا تغییر کند. Kieren (1992) جبر را به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات معرفی می‌کند که با نمادین سازی و تعمیم روابط عددی و ساختارهای ریاضی و با عمل روی این ساختارها سروکار دارد.

یکی از اهداف آموزش ریاضی ایجاد درک مفهومی در دانش‌آموزان است. هر مفهوم آموخته‌شده در ریاضیات به مفاهیم قبلی و یا بعدی مرتبط است. Sfard and Linchevsky (1991) نیز در این زمینه بیان می‌دارند که اگر دانش جدید را با دانش قبلی خود ارتباط معنایی دهیم، در آن صورت به درک رابطه‌ای رسیده‌ایم؛ بنابراین مشکل در درک ساختار عبارت‌های جبری می‌تواند باعث مشکلاتی در یادگیری بسیاری از مفاهیم سطح بالاتر مانند ساده کردن عبارت‌های جبری، تجزیه، فاکتورگیری و... می‌شود و راه را برای بدفهمی‌ها هموار می‌کند.

Hoch and Dreyfus (2006) اشاره می‌کنند که ممکن است دانش‌آموزان دچار خطر بزرگی شوند به‌طوری که بتوانند در جبر نمره خوبی کسب کنند و به موفقیت‌های زودگذر برسند اما آن دانش‌آموزان، فقط قوانین را حفظ کردند و حتی ممکن است در آن زمان چیزی یاد گرفته باشند اما ریاضی را یاد نگرفتند. لذا وجود چنین مشکلاتی را می‌توان به خاطر نداشتن درک ساختاری در عبارت‌های جبری دانست؛ بنابراین درک ساختاری عبارت‌های جبری، به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای مهم است.

Sfard and Linchevsky (1994) بیان می‌دارند که عبارت $3(x + 5) + 1$ می‌تواند از منظرهای مختلف معانی متفاوتی داشته باشد: از یک منظر می‌توان آن را برحسب رویه محاسباتی به این صورت توصیف کرد که عددی با ۵ جمع شود، سپس در ۳ ضرب می‌کنند و نهایتاً حاصل با ۱ جمع شود از منظر دیگر این عبارت می‌تواند محصول یک فرایند باشد که یک عدد خاص نامعلوم را نشان می‌دهد از طرفی می‌تواند مانند یک تابع رفتار کند که به‌جای نمایش یک عدد ثابت تغییر را انعکاس می‌دهد و همچنین در یک سطح بسیار ساده

و ظاهری ممکن است به عنوان یک رشته بی معنی از نمادها دیده شود که به عنوان یک شیء ریاضی می تواند مورد دست ورزی قرار گیرد و با عبارت های نمادین دیگر ترکیب شود. همان طور که از مثال بالا مشخص است، دید افرادی که عبارت جبری را برحسب رویه محاسباتی می بینند با منظر آن دسته از افرادی که عبارت جبری را به عنوان محصول یک فرایند می بینند دو چیز متفاوت است به عبارتی، درک ساختار عبارت های جبری با درک فرایند عبارت جبری با هم متمایز است. برای اینکه به تفاوت و رابطه بین درک مفهوم و ساختار عبارت جبری با درک فرایند پی ببریم، لازم است تعریف دانش مفهومی و دانش رویه ای^۱ و رابطه بین آنها شرح داده شود (Hiebert and Lefevre 1986) بیان می کنند که دانش مفهومی، روی روابط تأکید دارد اما در مقابل دانش رویه ای دانشی است که فرد را قادر می سازد تا با سرعت و کفایت مسائل را حل کند و این دانش اغلب غیر آگاهانه فراخوانده می شود. در مورد رابطه بین این دو دانش، ممکن است تصور شود که اینها مقابل هم هستند اما محققان بر این توافق اند که دانش رویه ای و مفهومی هر دو از مؤلفه های حیاتی و ضروری مهارت ریاضیات به شمار می روند (Star, 2005).

در این زمینه Sfard (1991) یک قدم جلوتر می رود و علاوه بر پذیرش ادعاهای دیگر محققان، ادعا می کند که رویه و مفهوم که او آنها را عملیاتی و ساختاری^۲ نام گذاری کرد، دو وجه مکمل و جدایی ناپذیر یک چیز و در واقع دو روی یک سکه هستند. از نظر Sfard (1991) مفهوم عملیاتی اشاره به فرایندها، الگوریتم ها و فعالیت ها دارد و مفهوم ساختاری اشاره به یک کل ساکن و یکپارچه ای دارد که مفهوم در آن به صورت یک شیء ریاضی دیده می شود.

Sfard (1991) مفاهیم عملیاتی و ساختاری را به صورت جدول ۱ توصیف می کند.

جدول ۱. توصیف مفهوم عملیاتی و مفهوم ساختاری (Sfard, 1991)

مفهوم ساختاری	مفهوم عملیاتی	
	یک شی ریاضی که از حاصل	
یک وجود ریاضی به عنوان یک	یک فرایند تشکیل می شود و در	ویژگی های کلی
ساختار ساکن درک می شود	اصل آن و شیء، با فرایندش	
	شناخته می شود	

1. Conceptual knowledge and procedural knowledge
2. Operational & Structural

هدف از تئوری شیء انگاری اسفارد، عبور از یک سطح ساده (عملیاتی) به یک سطح پیچیده (ساختاری) است که این عمل بر پایه مکانیزم «شیء انگاری» از فرایند به یک «کل ایستای فشرده»^۱ است.

اسفارد در تئوری شیء انگاری برای عبور از مفهوم عملیاتی به ساختاری به سه مرحله اشاره دارد:

مرحله درونی سازی^۲: در این مرحله یادگیرنده فرایندی را روی اشیا معلوم انجام می‌دهد
مرحله فشرده‌سازی^۳: در این مرحله، فرد بدون اینکه به جزئیات کار داشته باشد، توانایی این را دارد که فرایند را به صورت کل ببیند.

مرحله شیء انگاری^۴: در این مرحله، یادگیرنده کل مفهوم را به عنوان یک شیء کامل تصور می‌کند و با آن می‌تواند مانند یک شیء ریاضی رفتار کند.

او بیان می‌کند که مرحله شیء انگاری و درک ساختاری برای درک فرایندهای پیچیده‌تر و سطح بالاتر ضروری است. بدین معنی که فرایندهای مختلف باید تبدیل به یک کل ساکن فشرده شوند تا شیء جدید نیز یک پایه برای سطوح بالاتر شود و اگر به عنوان یک کل به این مدل ساخت مفاهیم ریاضی نگاه شود به صورت سلسله‌مراتب درک می‌شود؛ یعنی یک سطح باید درک و تکمیل شود تا سطح بعدی آغاز شود و این چرخه فرایند-شیء-فرایند... می‌تواند بارها تکرار شود تا مفاهیم پیچیده ریاضیات ساخته شود.

Sfard (1994) بر اساس تئوری شیء انگاری خود، دو اصل آموزشی را برای ساخت مفاهیم بیان می‌کند:

اصل ۱: مفاهیم جدید نباید برحسب شکل ساختاری آنها، معرفی شوند.

اصل ۲: مفهوم ساختاری تا وقتی دانش آموزان به آن احساس نیاز نکردند، نباید معرفی شود. به این معنی که وقتی قرار است به یک سطح بالاتر رفت و مفهوم بالاتری فرا گرفته شود، درک و ساخت مفهوم ساختاری ضروری است.

در این زمینه Tall and Gray (1994) بر نقش نمادها متمرکز شدند. برای مثال عبارت $4+3$ ، برای بعضی افراد یک دستورالعمل برای اجرای جمع است و افرادی ممکن است آن را به عنوان مفهوم جمع ببینند که ۷ را نتیجه می‌دهد و افرادی هم ممکن است این نمادها را

-
1. Compact static whole
 2. Interiorization
 3. Condensation
 4. Reification

به صورت $۳+۴$ ، $۲+۵$ ، $۱+۶$ ببینند که همگی راه‌های مختلفی برای دیدن مفهوم ۷ می‌باشند. Tall and Gray (1994) از فرایندهای مختلفی که نتیجه یکسانی می‌دهند استفاده کردند تا مدلی به نام فرهوم^۱ را معرفی کنند که از ادغام فرایند و مفهوم در ذهن ایجاد می‌شود. در این نظریه فرایند و محصول با نماد یکسانی نمایش داده می‌شوند؛ بنابراین نمادها برای فرهوم می‌تواند فرایند یا مفهوم را فراخوانی کند.

Tall و همکارانش (2001)، برای شکل‌گیری فرهوم دو مرحله قبل از آن معرفی می‌کنند:

- ۱- رویه^۲: دنباله خاص از قدم‌ها که در یک مرحله انجام می‌شود
- ۲- فرایند^۳: یک مجموعه عمومی‌تر و کلی‌تر از تعدادی از رویه‌ها که لزوماً تأثیر یکسانی دارند.

و سپس ترکیب فرایند و مفهوم، فرهوم را می‌سازد. Tall and Gray (1994) مفهوم شکل گرفته شده را با نمادها در ارتباط می‌بینند؛ یعنی فرهوم یک نماد است که منعطفانه هر دو جنبه‌ی محصولی و فرآیندی یک مفهوم را بازتاب می‌کند.

جدول ۲ خلاصه‌ای از این دو مدل نظریه را نشان می‌دهد.

جدول ۲، انتقال بین فرایند و شیء در دو نظریه Sfard (1991) و Tall and Gray (1994)

فرایند	←	شیء
اسفارد (دهه ۸۰)	مرحله درونی سازی	شیء انگاری
گری و تال (دهه ۹۰)	رویه (الگوریتم خاص)	فرهوم (فراخوانی نماد)
	فرایند (تکرار چند رویه)	

با توجه به اینکه برای اولین بار به‌طور رسمی، دانش‌آموزان پایه هفتم با مفاهیم جبری از جمله متغیر و عبارت‌های جبری، آشنا می‌شوند، بنابراین چگونگی پرداختن کتاب درسی به این مفاهیم و نحوه معرفی آن‌ها به دانش‌آموزان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. شناخت منبع مشکلات دانش‌آموزان، ما را در شناخت آسان‌تر دانش‌آموزان و کسب اطلاعاتی در مورد نحوه فکر کردن آن‌ها، نوع اشتباهاتی که انجام می‌دهند و اینکه کجا ممکن است اشتباه

1. Procept
2. Procedure
3. Process

کنند، در آموزش به معلمان کمک شایانی می‌کند. پژوهش حاضر، به بررسی نحوه‌ی ساخت مفهوم متغیر و عبارات‌های جبری از منظر دو نظریه‌ی ساخت مفهوم Sfard (1991) و گ Tall and Gray (1994) پرداخته است.

مفهوم متغیر یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات به‌طور کل و به‌طور خاص در جبر است که نقش حیاتی و اساسی در جبر را ایفا می‌کند. مفهوم متغیر برای درک فعالیت‌های ریاضیات سطح بالا نیز بسیار ضروری است. Schoenfeld and Arcavi (1988) در بیان اهمیت متغیر بیان می‌کنند: «مفهوم متغیر پایه‌ای برای انتقال از حساب (دوره ابتدایی) به جبر (دوره متوسطه) است. با وجود اهمیت این مفهوم، به نظر می‌رسد بیشتر برنامه‌های درسی ریاضی که با متغیر به‌عنوان یک مفهوم اولیه که دانش‌آموزان بعد از چند فعالیت، به سهولت فرامی‌گیرند رفتار می‌کنند».

در زمینه مشکلات دانش‌آموزان در درک مفهوم متغیر مطالعات زیادی انجام شده است. Kuchemann (1981) از کار Collis (1975) درباره تفسیر دانش‌آموزان از حروف در حساب تعمیم‌یافته استفاده کرد و با استفاده از یک آزمون تست جبر بر اساس پروژه مفاهیم در ریاضیات و علوم دبیرستان (CSMS¹) درک ۳۰۰۰ دانش‌آموز بریتانیایی را از مفهوم متغیر بررسی کرد. او با استفاده از پاسخ‌های دانش‌آموزان، تفسیر دانش‌آموزان را از متغیر به ۶ دسته تقسیم کرد: حروف ارزیابی‌شده، حروف نادیده گرفته‌شده، حروف به‌عنوان اشیا، حروف به‌عنوان عدد خاص، حروف به‌عنوان عدد تعمیم یافته و حروف به‌عنوان متغیر.

در این زمینه Warren (2003) نیز در تحقیق خود برای بررسی درک دانش‌آموزان در مفهوم متغیر، آزمون کتبی برگزار کرد و بعدازآن، از دانش‌آموزان مصاحبه‌های نیمه ساختاریافته هم انجام داد. نتایج حاصل از هر دو ابزار آزمون کتبی و مصاحبه در تحقیق وارن، حاکی از تائید سطوح Kuchemann (1981) از درک دانش‌آموزان در مفهوم متغیر است و اکثر دانش‌آموزان مفهوم متغیر را به‌عنوان عدد مجهول خاص و عدد تعمیم یافته درک می‌کردند. Trigueros and ursini (2003) هم بر مبنای کار Kuchemann (1981) مدلی را معرفی کرد و از آن در توسعه و آزمون طراحی آموزشی استفاده کردند. آن‌ها ادعا کردند برای اینکه دانش‌آموزان بتوانند در متغیر ماهر شوند، نیاز است که توانایی تفسیر همه‌ی کاربردهای متغیر را در بخش‌های مختلف از یک مسئله چندمرحله‌ای داشته باشند.

زهره وند (۱۳۹۲) هم مطالعه‌ای در زمینه‌ی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در مفهوم متغیر انجام داد که نتایج حاصل از آن پژوهش نشان داد که اغلب دانش‌آموزان، درک محدودی از متغیر دارند و دارای اشتباهات مفهومی متعددی در مورد این مفهوم هستند. Heidari and Asghary (2021) هم در مطالعه خود درک دانش‌آموزان پایه هفتم، هشتم و نهم را در مفهوم متغیر بررسی کردند. نتایج این مطالعه هم همسو با سایر مطالعات بود و نتایج نشان داد که اکثر دانش‌آموزان نقش متغیر را در موقعیت‌های مختلف نمی‌توانند تشخیص دهند و اکثراً آن به‌عنوان مجهول خاص می‌بینند.

از آنجاکه برای ساخت عبارت‌های جبری از حروف استفاده می‌شود، بنابراین طبیعتاً رابطه نزدیکی بین درک معانی حروف و درک معانی عبارت‌های جبری وجود دارد. در زمینه مشکلات دانش‌آموزان در عبارت‌های جبری هم مطالعاتی انجام شده که نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که منبع مشکلاتی که دانش‌آموزان در درک عبارت‌های جبری می‌توانند داشته باشند، از بدفهمی‌های آن‌ها در درک متغیر و همچنین از درک نادرست آن‌ها در عبارت‌های حسابی است (Booth, 1984؛ Van Ameron, 2003؛ Novantana & Hosch, 2003؛ Samo, 2009؛ Banerjee & Subramaniam, 2012؛ Van Stiphout, 2013؛ حیدری و اصغری، ۱۳۹۸).

تحقیقاتی هم در مورد محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم انجام شده است که این کتاب را از منظرهای مختلف از جمله سطوح شناختی اندرسون، انواع استدلال و با هدف یادگیری عمیق مفاهیم موردبررسی قرار داده‌اند (یافتیان، ۱۳۹۵؛ احمد پور و همکاران، ۱۳۹۶؛ دری و همکاران، ۱۳۹۸).

علی‌رغم تحقیقات انجام‌شده در مورد مشکلات هر کدام از مفاهیم متغیر و عبارت‌های جبری در ایران و در سطح بین‌المللی، اما تحقیقی در ایران، در زمینه بررسی فرایند ساخت مفاهیم جبری به‌خصوص مفهوم متغیر و عبارت‌های جبری در کتاب درسی صورت نگرفته است. از همین روی پژوهش حاضر، با هدف بررسی فرایند ساخت مفاهیم جبری متغیر و عبارت‌های جبری در کتاب درسی، حائز اهمیت است.

در سال‌های ۱۳۹۳-۹۲۱۳ رویکرد برنامه درسی ریاضی ایران و در این راستا رویکرد کتب درسی ریاضی تغییر کرده است. کتاب ریاضی پایه هفتم تألیف شد که جبر و مفاهیم جبری در فصل سوم آن کتاب بیان می‌شود. با توجه به اینکه کتاب درسی ابزار اصلی تدریس

در کلاس ریاضی است، لذا بررسی محتوای کتاب یک عنصر مهم به شمار می‌رود و می‌تواند به معلمان کمک شایانی برای شناخت بدفهمی‌ها و عملکرد ضعیف دانش‌آموزان کمک کند؛ بنابراین این پژوهش در پی یافتن پاسخی برای این سؤال است که آیا ساخت مفاهیم متغیر و عبارت‌های جبری در کتاب درسی پایه هفتم بر اساس نظریه‌های ساخت مفهوم Sfard (1991) و Tall and Gray (1994) است؟

روش

این مطالعه با رویکرد تفسیری به روش تحلیل محتوا انجام شده است و از نوع کیفی است. این پژوهش از نظر هدف، جزء پژوهش‌های کاربردی است. در این پژوهش فعالیت‌های فصل سوم کتاب ریاضی پایه هفتم بر اساس چارچوب‌های نظری اسفارد و تال تحلیل شده است. با توجه به تغییر برنامه درسی ریاضی ایران در سال ۱۳۹۳-۱۳۹۲ و به تبع آن تغییر کتب درسی ریاضی و نتایج حاصل از پژوهش‌ها در بررسی درک دانش‌آموزان در مفاهیم متغیر و عبارات جبری، لزوم بررسی ساخت این دو مفهوم را در کتاب ریاضی پایه هفتم دوچندان می‌کند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان برای اولین بار در پایه هفتم با جبر و مفاهیم جبری آشنا می‌شوند، بنابراین جامعه آماری در پژوهش حاضر کتاب ریاضی پایه هفتم انتخاب شد. این کتاب ۹ فصل دارد که برای نمونه فصل سوم که فصل جبر و معادله است، انتخاب شده است. این فصل از چند بخش تشکیل شده است که با توجه به هدف پژوهش، فعالیت‌های دو بخش متغیر و عبارت‌های جبری، با استفاده از نمودار ساختار فرایند - شیء - فرایند - شیء ... Sfard (1991) و مدل فرهوم Tall (1994) تحلیل شده است.

یافته‌ها

در هر قسمت از کتاب ریاضی، برای شروع ساخت مفهوم جدید از فعالیت استفاده شده است به طوری که در پایان فعالیت‌ها، مفهوم جدید شکل گرفته است. بعد از فعالیت‌ها، کار در کلاس و تمرین‌هایی قرار داده شده است. بنا به قسمت «سخنی با دانش‌آموز» در ابتدای کتاب، کار در کلاس و تمرین در مفهوم‌سازی نقشی ندارند و فقط نقش تثبیت مفهوم را دارند؛ بنابراین در پژوهش حاضر به تحلیل فعالیت‌های مربوط به دو بخش متغیر و عبارت‌های جبری پرداخته شده است.

در بخش اول از فصل سوم کتاب ریاضی پایه هفتم، الگوهای عددی آموزش داده می‌شود. هدف از این بخش تعمیم مفهوم حرف به متغیر است. بدین منظور و برای معرفی متغیر از انواع بازنمایی‌های الگو مانند الگوی هندسی، جدول داده‌ها، الگوی عددی استفاده شده است.

برای ساخت مفهوم متغیر، یک فعالیت در صفحه ۲۸ کتاب درسی طراحی شده است که متشکل از ۳ تکلیف است که هر کدام در بافت‌های کاملاً مجزا توصیف شده‌اند. در تکلیف اول از فعالیت، شکل ۱، زمینه تکلیف یک تشک کشتی به شکل مربع است که هدف آن ساختن یک رابطه تابعی بین دو متغیر اندازه ضلع تشک و محیط تشک است. در این تکلیف با تخصیص مقادیر مختلف به متغیر اندازه ضلع تشک، درخواست تعیین محیط تشک و بالعکس شده است.

شکل ۱. تکلیف اول فعالیت صفحه ۲۸

۱- یک تشک کشتی به شکل مربع است. جدول زیر را کامل کنید.

اندازه ضلع تشک	۴	۶/۵	$۵\frac{۱}{۳}$		a
محیط تشک			۳۲	۲۰	



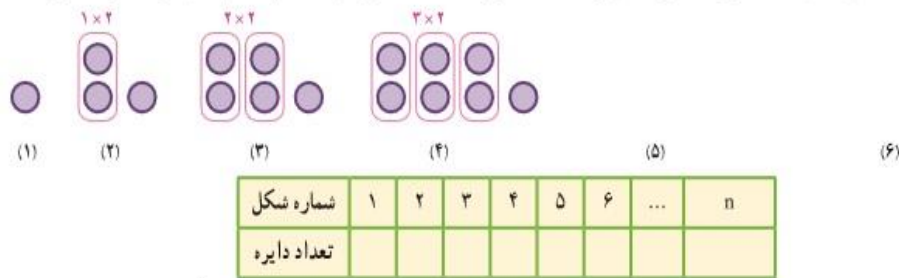
در بخشی از تکلیف که به ازای مقادیر ۴ و ۶/۵ و $۵\frac{۱}{۳}$ مقادیر محیط تشک به دست می‌آید، مرحله درونی سازی مدل Sfard (1991) اتفاق می‌افتد. این مرحله همان رویه در مدل Tall and Gray (1994) است. چرا که دانش آموز با اعداد محسوس سروکار دارد که هر بار مقدار مشخصی به اندازه ضلع تشک نسبت داده می‌شود. با یافتن مقادیر مختلف برای محیط تشک به طور متوالی و با محاسبه صرفاً، ۳ مقدار برای اندازه ضلع تشک، انتظار می‌رود که عمل جایگزینی ضلع تشک در یک قانون خاص، موجب فشرده‌سازی (Sfard, 1991) مفهوم متغیر در ذهن دانش آموز شود که Tall and Gray (1994) از این مرحله به عنوان فرایند نام می‌برند. سپس کتاب درسی با ارائه صورت نمادین متغیر a انتظار دارد مرحله شیء انگاری

(Sfard, 1991) مفهوم متغیر که Tall and Gray (1994) این مرحله را فرهوم نام‌گذاری کردند، شکل گیرد. طبق نظر اسفارد این امر بسیار دشوار است. برای شکل‌گیری مرحله سوم مفهوم‌سازی، انتظار می‌رود که در مرحله اول با انجام چندین تکلیف اتفاق بیفتد تا زمینه را برای شیء انگاری به مفهوم متغیر آماده سازد.

برای بار دوم همین روند در تکلیف دوم از فعالیت که در بافت مشخص توصیف نشده است و یک الگوی ریاضی را نوید می‌دهد، پیگیری شده است. (شکل ۲)

شکل ۲. تکلیف دوم فعالیت صفحه ۲۸

۲- اکنون با توجه به شکل‌های زیر و الگویی که مشاهده می‌کنید، ابتدا شکل پنجم و ششم را رسم و سپس جدول را کامل کنید.

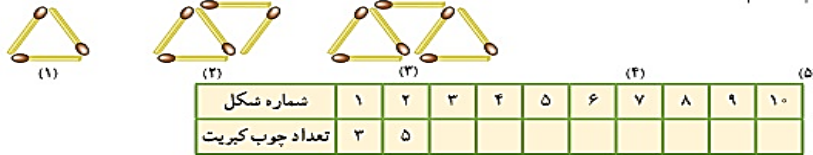


در تکلیف سوم از فعالیت، شکل ۳، که باز هم بافتی برای آن پیش‌بینی نشده است، رابطه بین شماره شکل و تعداد چوب‌کبریت‌ها مدنظر است که پس از آنکه از دانش‌آموز خواسته می‌شود در ۱۰ مرحله تعداد چوب‌کبریت‌ها را محاسبه کند، بالاخره از او در مورد ساختن حدسی درباره رابطه بین شماره شکل و تعداد چوب‌کبریت سؤال می‌شود. همان‌طور که گفتیم این مرحله، مرحله فشرده‌سازی Sfard (1991) و همان مرحله رویه در مدل Tall and Gray (1994) است که در دو تکلیف اول عملاً تلاشی برای شکل‌گیری این مهم انجام نمی‌شود و کتاب درسی انتظار دارد به‌طور خود به خودی تحقق یابد. در تکلیف سوم نهایتاً از محاسبه تعداد چوب‌کبریت‌ها برای شکل n ام سؤال می‌شود که در این تکلیف به نظر می‌رسد بجاست.

شکل ۳. تکلیف سوم فعالیت صفحه ۲۸

۳- تحلیل‌های زیر با چوب کبریت درست شده‌اند و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کنند. با توجه به آنها جدول را کامل کنید. ابتدا

شکل‌های چهارم و پنجم را رسم کنید.



با توجه به الگویی که در جدول مشاهده می‌کنید، توضیح دهید چه رابطه‌ای بین شماره شکل و تعداد چوب کبریت‌ها وجود دارد؟
شکل n ام چند چوب کبریت خواهد داشت؟ تعداد چوب کبریت‌ها را بر حسب n بنویسید.
حال با توجه به رابطه‌ای که به دست آوردید، تعداد چوب کبریت‌های شکل بیستم را پیدا کنید.

طبق نظر Sfard (1991) برای تحقق و ساخت مفهوم متغیر، لزوماً باید ابتدا مراحل را با اعداد مشخص و محسوس آغاز نمود. بعد از تکرار چند مرحله متوالی با اعداد مشخص، دانش آموز نگاه کلی تری به رابطه بین دو متغیر (برای مثال در تکلیف قبل، رابطه بین شماره‌ی شکل و تعداد چوب کبریت) می‌کند. البته بهتر است برای سوق دادن ذهن دانش آموز به این رابطه و دیدگاه، سؤالاتی نیز در این زمینه از دانش آموزان پرسیده شود از قبیل:


- به نظر شما شکل دهم چند چوب کبریت دارد؟
- به نظر شما شکل بیستم چند چوب کبریت دارد؟
- به نظر شما شکل سی‌ام چند چوب کبریت دارد؟
- آیا می‌توانی رابطه‌ای بین شماره شکل و تعداد چوب کبریت را به صورت کلامی بیان کنی؟

با طرح چنین سؤالاتی در این مرحله یک طرح‌واره عملیاتی از الگوریتم‌ها در ذهن دانش آموز شکل می‌گیرد، در این مرحله صرفاً تمرکز بر روی رابطه بین دو متغیر (برای مثال روی شماره شکل و تعداد چوب کبریت‌ها)، نمادها و علائم است و در نهایت در مرحله آخر، حروف به جای اشیا محسوس و آشنا، قرار می‌گیرد که دانش آموز با برقراری ارتباط بین اجزا و روابطی که می‌سازند، به مفهوم جدید می‌رسد؛ بنابراین در مدل ساخت مفهوم Sfard (1991)، انتقال تمرکز از عمل و فرایند بر روی اشیا که می‌شناسیم، به فکر کردن به آن اعمال به عنوان اشیا ذهنی قابل دست ورزی است.

در انتهای صفحه ۲۸، بعد از اتمام فعالیت، در کادر پایین صفحه، تعریف متغیر را که انتظار داشته است تا اینجا دانش آموز درک کرده باشد به اشتباه بیان می‌کند که این باعث

ایجاد بدفهمی‌هایی در دانش آموز می‌شود. در این تعریف بیان شده است: «متغیرها نمادهایی برای بیان عددهای نامعلوم یا مقادیر غیر مشخص‌اند» در صورتی که متغیر همان‌طور که از اسم آن مشخص است، تغییر را نشان می‌دهد و به جای آن مقادیر مختلفی می‌تواند قرار گیرد. در فعالیت صفحه ۳۱ از بخش دوم، ۳ تکلیف طراحی شده است. در تکلیف اول (شکل ۴)، محیط مربعی به ضلع a را خواسته است.

شکل ۴. تکلیف اول از فعالیت صفحه ۳۱

	$P = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$	۱- محیط مربع مقابل را به دست آورید.
		در درس قبل محیط مربع به صورت $4a$ نوشته شده است، درستی این تساوی را توضیح دهید.
	$a+a+a+a=4a$	

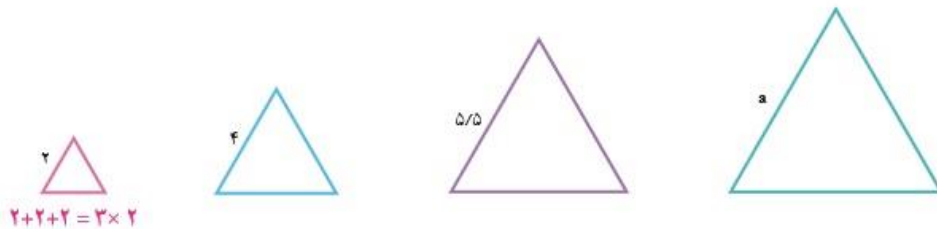
با توجه به اینکه در تکلیف اول فعالیت صفحه ۲۸ نیز محیط مربع را به صورت رابطه $4a$ نمایش داده شده است، در این فعالیت با هم‌ارز قرار دادن این دو رابطه، همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، از دانش آموز علت درستی عبارت زیر را سؤال می‌کند:

$$a+a+a+a=4a$$

در تکلیف دوم (شکل ۵) شبیه تکلیف اول، رابطه هم‌ارزی را برای محیط مثلث متساوی‌الاضلاع سؤال شده است که در ابتدا روی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع که ضلع‌های آن اعداد مشخص و محسوس هستند انجام می‌شود که از یک طرف، این مرحله درونی سازی Sfard (1991) است و از طرف دیگر، همان مرحله رویه در مدل Tall and Gray (1994) است؛ اما مرحله فشرده‌سازی Sfard (1991) اتفاق نیفتاده و بلافاصله وارد مرحله شیء انگاری Sfard (1991) شده است و محیط مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را مورد سؤال قرار داده است.

شکل ۵. تکلیف دوم از فعالیت صفحه ۳۱

۲- محیط مثلث متساوی الاضلاع را به دو صورت به دست آورید.



در تکلیف سوم همین فعالیت (شکل ۶)، محیط مثلث متساوی الساقین و مستطیل خواسته شده است که به نظر می‌رسد، هدف از طراحی این تکلیف این است که اشکال با ضلع‌هایی با برچسب‌های متفاوت را بتوانند به صورت عبارت جبری بنویسند و در انتها با طرح دو سؤال که آیا می‌توان a را با a جمع کرد و آیا می‌توان a را با b جمع کرد؟ فعالیت را تمام می‌کند.

شکل ۶. تکلیف سوم از فعالیت صفحه ۳۱

۳- حالا محیط مثلث متساوی الساقین و مستطیل را به دست آورید.



آیا می‌توانیم a را با a جمع کنیم؟ چرا؟

آیا می‌توانیم a را با b جمع کنیم و با یک جمله نشان دهیم؟ چرا؟

انتظار می‌رود در پایان این فعالیت، دانش‌آموز با عبارت جبری آشنا شود و بتواند آن را بسازد. در حالی که هدف از فعالیت این صفحه، ساخت و آشنایی عبارت‌های جبری است اما در تمام تکلیف‌های آن، با گذاشتن علامت تساوی به دنبال ساخت یک رابطه هم‌ارزی برای عبارت‌های جبری است که این باعث ایجاد بدفهمی در دانش‌آموز می‌شود؛ زیرا در ذهن آن‌ها این تصور ایجاد می‌شود که به دنبال یک عبارت جبری علامت تساوی قرار دهند و در جستجوی عبارتی برای قرار دادن در طرف دوم باشند؛ بنابراین نیازی به تأکید برای نوشتن

رابطه هم ارزی و جمع جملات متشابه در این فعالیت نبود چرا که در فعالیت صفحه ۳۲، این هدف را دنبال می‌کند و فقط در این فعالیت، هدف، آشنایی و ساخت عبارات‌های جبری است.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف از پژوهش حاضر، بررسی روند ساخت مفهوم متغیر و عبارات‌های جبری با استفاده از نظریه‌های ساخت مفهوم Sfard (1991) و Tall and Gray (1994) بود. به این منظور ابتدا به بررسی روند ساخت مفهوم متغیر و سپس مفهوم عبارات‌های جبری در فعالیت‌های کتاب ریاضی پایه هفتم پرداخته شد. نتایج حاصل از تحلیل‌ها نشان می‌دهد که در فعالیت‌های کتاب ریاضی پایه هفتم در فصل جبر، ساخت مفهوم جدید به درستی صورت نگرفته است. در مورد ساخت مفهوم متغیر، مرحله فشرده‌سازی به صورت مطلوب صورت نگرفته است و با عبور سریع از مرحله فشرده‌سازی، به مرحله شیء انگاری رسیده است که لزوماً باعث نمی‌شود که مرحله شیء انگاری مفهوم جدید در ذهن به طور صحیح صورت گیرد. با توجه به اینکه Sfard (1991) بیان می‌دارد که برای ساخت مفهوم جدید ریاضی باید از سه مرحله درونی سازی، فشرده‌سازی و شیء انگاری عبور نمود تا بعد از اتمام مرحله آخر، مفهوم جدید به عنوان یک شیء ریاضی در ذهن ایجاد شود.

حروف در موقعیت‌های مختلف می‌تواند معانی متفاوتی داشته باشد. در این فصل از کتاب پایه هفتم، حروف به عنوان متغیر حضور دارند؛ یعنی جنس تغییر کردن در حروف باید پررنگ‌تر شود. با توجه به اینکه در کتاب درسی، تعریف مفهوم متغیر به صورت «نمادهایی برای بیان عددهای نامعلوم یا مقادیر غیر مشخص» بیان شده است، باعث ایجاد بدفهمی‌هایی می‌شود که ممکن است دانش آموزان به آن مفهوم تغییر دست پیدا نکنند. یافته‌های پژوهش حاضر با یافته‌های حیدری و اصغری (2020) همسو است.

نتایج حاصل از تحلیل‌های فعالیت‌ها در مورد مفهوم عبارات‌های جبری هم نشان می‌دهد که مرحله فشرده‌سازی حذف شده و از مرحله درونی سازی وارد مرحله شیء انگاری شده است. با توجه به اینکه درک رویه‌ای پیش‌نیاز درک ساختاری در ساخت مفهوم است، تحلیل‌های پژوهش حاضر نشان می‌دهد که در ساخت مفاهیم جبری روی مرحله رویه‌ای تأکید بیشتری شده و بعد از آن بدون رعایت دقیق مراحل بین آن‌ها، تلاش در ساخت مفهوم

ساختاری شده است. همچنین یافته‌های پژوهش حاضر با یافته‌های آرزو بشیر و نرگس یافتیان (۱۳۹۵)، حیدری و اصغری (۱۳۹۸) همسو است.

Sfard and Linchevsky (1994) بیان می‌کنند که با وجود دشوار بودن ذاتی شیء انگاری و اینکه ممکن است در یک سطح خاص و در زمینه‌های معین، دسترسی دانش‌آموزان به رویکرد ساختاری دشوار باشد، ممکن است زمانی این زنجیر توسعه مفهوم گسسته شود و فرایند یادگیری به‌درستی انجام نشود؛ بنابراین در تحلیل‌های انجام‌شده در پژوهش حاضر، زنجیر توسعه مفهوم گسسته شده است و دانش‌آموزان برای ادامه کار ناگزیر هستند از جایگزینی شاید نادرست استفاده کنند و ادامه کار را در ذهن خود بر روی آن جایگزین انجام دهند که در این حالت Sfard and Linchevsky (1994) بیان می‌کنند که یادگیرنده یک مفهوم شبه ساختاری^۱ را توسعه داده است.

بنا به Foster (2007) اگر به دانش‌آموزان ایده‌های مجرد بدون معنی تدریس شود، آن‌ها هیچ درکی از آن پیدا نمی‌کنند بنابراین در بدترین شرایط محتوای شبه ساختاری را حفظ می‌کنند و یا در بهترین حالت از همان مفهوم رویه‌ای استفاده می‌کنند و آن را توسعه می‌دهند درک رویه‌ای و ساختاری هر دو باید با هم توسعه پیدا کنند. کامل شدن مرحله درک رویه‌ای و طی کردن سه مرحله بین آن، باعث می‌شود درک ساختاری دقیق و درستی ایجاد شود. به‌طور کلی دانش رویه‌ای به‌عنوان مهارت قدم‌به‌قدم و به‌عنوان رویه‌هایی برای انجام ریاضیات شناخته می‌شود؛ بنابراین بدفهمی‌ها اغلب وقتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان تعمیم نامطلوب یا تخصیص نامطلوب داشته باشند که هر دو این‌ها به درک مفهومی مرتبط است.

با توجه به اینکه درک عمیق مفاهیم پایه مانند مفهوم متغیر و عبارت‌های جبری، برای یادگیری مفاهیم بالاتر و پیچیده‌تر ضروری است، بنابراین لازم است، محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم، زمینه بسترسازی برای یادگیری جبر و ارتقای مهارت‌های جبری را ایجاد کند تا معلمان هم بتوانند وظیفه آموزش خود را به نحو احسن انجام دهند. انتظار می‌رود تحلیل‌های انجام‌شده راهنمایی برای مؤلفان و برنامه‌ریزان درسی در تجدیدنظرهایی بعدی کتاب درسی ریاضی پایه هفتم باشد. از محدودیت‌های پژوهش حاضر، نبودن برنامه درسی مدون است که در آن اهداف درسی را تبیین کرده باشد.

منابع

- احمدپور، فاطمه و فدائی، محمدرضا و رفیع پور، ابوالفضل. (۱۳۹۶). لزوم بازاندیشی در محتوای کتاب‌های درسی ریاضی پایه هفتم و هشتم از منظر استدلال و اثبات. *مطالعات برنامه درسی*، ۱۲(۴۶)، ۵۹-۸۴.
- دری، محمد مهدی و رفیع پور، ابوالفضل و دری، فاطمه. (۱۳۹۶). ارزیابی ظرفیت کتاب‌های درسی ریاضی دوره متوسطه اول در ترویج یادگیری عمیق مفاهیم. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران*، ۱۴(۵۲)، ۱-۳۰.
- حیدری، فاطمه الزهراء، اصغری، نسیم. (۱۳۹۸). بررسی درک رویه‌ای و ساختاری دانش‌آموزان دوره متوسطه اول در عبارت‌های جبری، نشریه علمی فناوری آموزش، ۱۳(۳)، ۶۷۱-۶۶۰.
- یافتیان، نرگس و بشیر، آرزو. (۱۳۹۵). تحلیل فصل جبر و معادله کتاب ریاضی پایه هفتم بر اساس پنج الگوی مختلف، نشریه علمی فناوری آموزش، ۱۱(۲)، ۲۱-۳۳.

References

- Bednarz, N, Kieran, C & Lee, Lesley. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Booth, L. R (1984). Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Windsor, UK: NFER-NELSON.
- Collis, K F (1974). "Cognitive development and mathematics learning", paper prepared for *Psychology of Mathematics Education Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London, 28 June*
- Foster, D. (2007). Making meaning in algebra: Examining students' understandings and misconceptions. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficiency* (pp. 163-176). New York: Cambridge University Press.
- Gray, E. & Tall, D. (1994). "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic", *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2) p. 116-40
- Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of 25th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 65-72. Utrecht: The Netherlands.
- Gray & Tall (1992). Success and failure in mathematics: Procept and procedure. In *Workshop on Mathematics Education and Computers*, (pp. 209-21), Taipei: Taipei National University
- Heidari, F. & Asghary, N. (2021). Students' perception of letters as specific unknown and variable: The Case of Iran. *Journal for Educators, Teachers and Trainers*, 11(1), 79-92. doi: 10.47750/jett.2020.11.01.008
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Prague, Vol. 3 (pp. 305-312).
- Kaput, J. I. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. I. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: NCTM.
- Küchemann, D. (1981). 'Algebra', in K. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics*: 11-16, Murray, London, pp. 102-119.
- Linchevski, L., & Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, 176-183). Lisbon, Portugal: PME.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 93-166.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17 (1), 26-33
- Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.
- Rystedt, E. (2015). *Encountering algebraic letters, expressions and equations: A study of small group discussions in a Grade 6 classroom*. (Licentiate thesis). Gothenburg: University of Gothenburg.
- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81, 420-427.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 1-36.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification? The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(26), 191-228.
- Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.
- Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. In Selden, A., Dubinsky, E., Harel, G., & Hitt, F. Eds. *Research in Collegiate Mathematics Education*. V. Providence, RI: AMS/MAA. p. 1-29
- Van Amerom, B.A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 63-75.
- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.
- Wheeler, D. (1996). Backwards and Forward: Reflection On Different Approaches to Algebra.