

مروری بر روش شبیه‌سازی مونت کارلو^۱

امیر بهداد سلامی*

امروزه استفاده از انواع روش‌های شبیه‌سازی در عرصه علوم مختلف عمومیت یافته است. هرچند از مدت‌ها پیش است که بهره‌گیری از این ابزار در علوم انسانی و اقتصاد نیز رایج شده است، اما استفاده وسیع از آن به همین اواخر بازمی‌گردد. آشنایی با این ابزار کارآمد و شناسایی نقاط ضعف و قوت آن امکانات جدیدی را در اختیار محققین، اساتید، دانش‌آموختگان و کارشناسان اقتصاد قرار خواهد داد. از میان روش‌های مختلف شبیه‌سازی، روش مونت کارلو برای تحقیقات و محاسبات مالی و اقتصادی از سایر شیوه‌ها مناسب‌تر است. این مقاله سعی در معرفی این روش و ابزارهای پیشرفته‌تری نظیر شبیه‌سازی شبه مونت کارلو و مونت کارلو ادغامی دارد. در این راستا، به مثالی در زمینه‌ی بازار ابزار مشتقه نیز اشاره شده است.

کلید واژه‌ها:

شبیه‌سازی، مونت کارلو، مونت کارلو ادغامی، شبه مونت کارلو، نظریه بلک - شولز، قرارداد حق انتخاب

1- Monte Carlo Simulation (MCS)

* - امیر بهداد سلامی؛ دانشجوی دوره دکتری دانشگاه علامه طباطبائی.

E-mail: amir.salami@parsian-bank.net

www.SID.ir

مقدمه

در اقتصاد، مالیه، صنایع و فنون مرتبط به آنها نظیر؛ بانکداری، بیمه، جهانگردی، بازرگانی، مدیریت مالی، مدیریت ریسک، بازاریابی، ارزیابی طرح‌های سرمایه‌گذاری و...، اغلب تصمیم‌گیری‌ها بر پایه روابطی اتخاذ می‌شود که حداقل یک جز آن، از محاسبه ارزش‌های تنزیل یافته یک یا چند متغیر مربوط به آینده تا زمانی معلوم (به‌طور معمول، زمان حال)، به‌دست آمده‌است. از آنجایی که در بیشتر مواقع، ارزش‌های آتی چنین متغیرهایی، از پیش قطعیت نداشته و نامعلوم است، تصمیم‌گیری بر پیش‌بینی مبتنی می‌گردد.

بر همین اساس، بخش وسیعی از تلاش جمعی دانشمندان این علوم و فنون، صرف ساخت و دستیابی به شیوه‌های کارآمدتر پیش‌بینی متغیرها شده‌است.^۱ رسیدن به این پیش‌بینی، نیازمند مدلی با توانایی تفکیک دو جزء تعیین‌پذیر و تصادفی می‌باشد که در آن ویژگی‌های جزء دوم نظیر نوع توزیع احتمال، میانگین، فواصل اطمینان و واریانس نیز معرفی شده‌است. سپس مدل طراحی شده جهت محاسبه پیش‌بینی‌ها به کار گرفته می‌شود. شبیه‌سازی روشی است که از طریق آن می‌توان رفتاری مشابه جزء تصادفی الگوی طراحی شده را ایجاد کرد. به این ترتیب امکانی فراهم می‌شود تا پیش‌بینی به همراه درجه اطمینان و به عبارتی درجه ریسک آن قابل محاسبه شود.

شبیه‌سازی مونت کارلو یکی از انواع این روش‌هاست. در گزارش حاضر سعی شده‌است در نهایت سادگی، مباحث مهم و کاربردی این شیوه و بدیل‌های آن مرور شود. در ضمن، زمینه‌های استفاده از این روش در مالیه نیز شناسایی خواهد شد. این گزارش بدین شکل سازمان یافته‌است که ابتدا تعریفی مختصر از شبیه‌سازی آرایه می‌شود، سپس در بخش‌های دو الی چهار؛ روش‌های مونت کارلو، شبه مونت کارلو^۲ و

۱- ممکن است این شیوه‌ها در حوزه سایر علوم کشف یا خلق شده‌باشد، لذا فقط کافی است پس از یادگیری، در حوزه‌های اقتصادی و مالی به کار رود.

مونت کارلو ادغامی^۱ معرفی و نقد خواهند شد. بخش پنج، به مرور کاربرد این روش‌ها در اقتصاد و مالیه می‌پردازد و در ادامه، در بخش شش، سایر تحولاتی که در این عرصه در شرف وقوع است، معرفی می‌گردد و در نهایت در بخش پایانی، نتیجه‌گیری و زمینه‌های تحقیقاتی آینده ارایه و پیشنهاد می‌شود.

۱- تعریف شبیه‌سازی

شبیه‌سازی عبارت است از ایجاد محیطی ساختگی و استفاده از یک مدل نظری، برای تخمین رفتار یک سازمان یا سیستم موجود در جهان واقعی. محیط ساختگی یا مصنوعی، فضایی معادل حقیقی یا مجازی است که در آن تحلیل‌گر تلاش می‌کند تا سازمانه واقع در جهان حقیقی را الگوبندی کند. برای مثال؛ در مالیه که در آن به‌طور معمول با مدلی حسابداری از جریانات نقدی ورودی یا خروجی کار می‌کنیم، با توجه به شناختی (فروضی) که در مورد رفتار اجزای اثرگذار و سازنده متغیر تحت بررسی، و چگونگی ارتباط میان آنها (با توجه به همان مدل نظری) موجود است و یا در محیطی نظیر رایانه؛ می‌توان به‌طور مصنوعی ارقامی برای متغیر در حال مطالعه تولید کرد. با تکرار این عمل در حد کفایت امکان شناسایی هرچه بیشتر رفتار متغیر، قبل از وقوع و مشاهده مکرر آن در محیط حقیقی فراهم می‌آید.

بسته به اینکه از شبیه‌سازی چه هدفی دنبال می‌شود و چه محدودیت‌هایی در به‌کارگیری آن وجود دارد، می‌توان چهار نوع شبیه‌سازی را از یکدیگر تفکیک کرد که در کارهای تجربی به‌طور منفرد یا جمعی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱- شبیه‌سازی مولد (نمونه‌سازی)^۲

۲- شبیه‌سازی تحلیلی یا تکنیکی^۳

1- Hybrid-MCS

2- Sample Generator Simulation

3- Tactical or Sensitivity Analysis Simulation

۳- شبیه‌سازی راهبردی یا پی‌گردی^۱

۴- شبیه‌سازی ذهنی یا شهودی^۲

اولین نوع از این شبیه‌سازی‌ها، زمانی به کار می‌رود که به دلیلی نتوان داده نمونه را برای متغیر تحت بررسی به دست آورد؛ زیرا هنوز وقوع نیافته و یا ثبت نشده است و یا اینکه، نمونه‌گیری از آن اقتصادی نیست. تنها دانشی که به ما در شبیه‌سازی کمک می‌کند، اطلاعات پیرامون جمعیتی است که نمونه‌گیری باید در آن صورت بگیرد. این نوع شبیه‌سازی را برای پیش‌بینی از طریق مدل‌های رگرسیونی حاوی اختلال‌های تصادفی نیز می‌توان به کار برد. برای مثال؛ فرض می‌کنیم رابطه زیر بین Y ، X و W وجود داشته باشد: $Y = a + bW + cX + e$ که در آن Y متغیر مورد مطالعه، W متغیری با نمونه قابل دسترس، X متغیری مثبت با میانگین \bar{X} و توزیع احتمال مشخص و غیر قابل نمونه‌گیری و e جمله‌ی اختلال با توزیع نرمال به میانگین μ و واریانس σ^2 است. در این حالت به منظور بررسی رفتار Y ، باید مقدار X و e شبیه‌سازی شوند.

دومین نوع، زمانی مورد استفاده است که سوال اصلی، نحوه رفتار مدل یا متغیر تحت بررسی - در صورت بروز تغییری در پارامترهای الگو - باشد. برای مثال؛ اگر بخواهیم در رابطه $Y = a + bX + cX^2$ حساسیت Y را نسبت به تغییرات c بسنجیم، می‌توانیم از طریق ایجاد تغییرات ساختگی، این موضوع را شبیه‌سازی کنیم.

نوع سوم شبیه‌سازی، بیشتر در مواقعی به کار گرفته می‌شود که چگونگی اثر تغییر متغیری تحت کنترل بر متغیر مورد مطالعه مدنظر است. فرض کنید در مثال بالا متغیر X تحت کنترل است، یعنی، مقداری که اختیار می‌کند به تصمیم و اقدام بررسی‌کننده بستگی دارد و قصد داریم بدانیم اگر آن را از مقدار اولیه X_0 به X_1 تغییر دهیم چه اتفاقی برای Y می‌افتد. آزمون این سوال نیز از طریق شبیه‌سازی مدلی که

1- Strategic or Exploratory Simulation

2- Interactive

یک بار توسط مشاهدات تاریخی تأیید شده، میسر است و به آن شبیه‌سازی نیز «چه اتفاق می‌افتد اگر؟» می‌گویند.

و بالاخره آخرین نوع شبیه‌سازی در واقع همان الگوبرداری از فرایند تصمیم‌گیری مغز انسان در مورد متغیرهای اثرگذار است که پس از نسخه‌برداری در ساخت هوش‌های مصنوعی به کار گرفته می‌شود. در حقیقت این ذهن، تجربیات، و دانش بشر است که شبیه‌سازی می‌شود. در این مورد می‌توان، دستگاه‌های شبیه‌سازی پرواز را مثال زد.

روش‌های گروه مونت کارلو؛ در دسته اول از انواع شبیه‌سازی‌ها می‌گنجند. لذا مطالعه حاضر تنها این نوع را پوشش می‌دهد.

۲- شبیه‌سازی مونت کارلو

عبارت مونت کارلو یک واژه بسیار عمومی است. روش‌هایی که در این گروه قرار می‌گیرند، از فنون آمار و احتمالات استفاده می‌کنند. این روش‌ها در همه علوم از فیزیک هسته‌ای گرفته تا ژنتیک و اقتصاد، کاربرد پیدا کرده‌است. البته، شیوه‌ای که این علوم در به کارگیری روش‌های مونت کارلو دارند، بسیار متفاوت از یکدیگر است. اما همگی یک وجه تشابه دارند، یعنی تمامی آنها از اعداد تصادفی برای آزمون و شبیه‌سازی یک پدیده طبیعی و حقیقی بهره می‌برند. بنابراین، برای اینکه به یک آزمون عنوان مونت کارلو اطلاق شود، کافی است مشاهده گردد که در آن، از شیوه‌های خلق اعداد تصادفی، استفاده شده‌است یا خیر؟

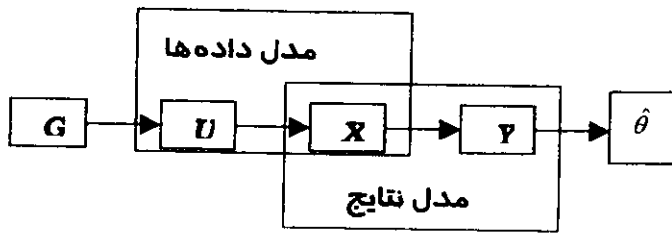
این نوع از شبیه‌سازی، به این دلیل که برای اولین بار در قمارخانه‌های محله مونت کارلو (شهری در کشور موناکو) به کار گرفته شد، روش مونت کارلو نام گرفت. از آنجایی که مونت کارلو، یک فن برای محاسبه نااطمینانی موجود در پیش‌بینی یک پیشامد احتمالی (نظیر پدیدار شدن عدد ۶ در یک بار تاس انداختن) است، به آن شبیه‌سازی اعداد تصادفی نیز می‌گویند.

روش مونت کارلو نیازمند یک الگوی ریاضی-آماري با دو جز کلي تعیین پذیر و تصادفي، برای متغير تحت بررسی است. به منظور روشن شدن بحث، مثال زیر را دنبال کنید. فرض کنید، کشف ویژگی‌های آماری متغير Y که دارای توزیع احتمالی ناشناخته است و امکان نمونه‌گیری از آن به دلایل فوق‌الذکر وجود ندارد، موضوع تحقیق باشد. در ضمن فرض کنید، دانشمندان فعال در حوزه مربوطه نشان داده‌اند که Y در ارتباط با متغير یا متغيرهای تصادفي دیگر به نام X است که توزیع شناخته شده‌ای دارد و ارتباط میان این دو نیز در قالب اصول، قوانین و نظریه‌های قابل قبول اندیشمندان آن حوزه (علم فیزیک، شیمی، اقتصاد، مالی و...) معرفی شده‌است. حال می‌توان از روش مونت کارلو برای تخمین ویژگی‌های توزیع Y بهره گرفت. شیوه عملی به‌طور خلاصه در زیر آمده‌است:

- ابتدا، به‌وسیله یک دستگاه مولد^۱، سری اعدادی تصادفي از یک توزیع احتمال یکنواخت با یک مقدار اولیه تولید می‌شوند.^۲ (G)
- سپس، این اعداد را به راحتی می‌توان به سری اعدادی با توزیع احتمال یکنواخت بین صفر و یک (U) تبدیل کرد و از آن؛
- در ایجاد سری اعدادی تصادفي با هر نوع توزیع احتمال شناخته شده دیگر بهره جست. (X)
- از این سری به‌عنوان داده ورودی رابطه نظری برای تولید متغيری که توزیع آن شناخته شده نیست نیز استفاده می‌شود. (Y)
- به‌عنوان نمونه‌ای از جامعه اصلی به حساب می‌آید و از این طریق می‌توان، پارامترهای مربوط به ویژگی‌های توزیع آن را تخمین زد. شمای زیر، این مراحل را به نحوی دیگر بیان می‌کند:

۱- در گذشته نه‌چندان دور این کار تنها با کمک ابر رایانه‌ها امکان‌پذیر بود، اما امروزه رایانه‌های شخصی نیز پس از نصب برنامه‌هایی کم حجم، توانایی چنین کاری را دارند.

۲- الگوریتم‌های مختلفی برای ایجاد این اعداد طراحی شده؛ اما معروف‌ترین آنها الگوریتم تولید اعداد تصادفي پسودو (Pseudo Random Number Generator) است.



اگرچه X و Y به ترتیب داده‌های ورودی و خروجی شبیه‌سازی شده هستند، از مدل‌هایی با توابع مشخص و داده شده‌ای به دست می‌آیند، تبدیل اعداد تصادفی به داده‌های ورودی و در ادامه به داده‌های خروجی یا نتایج، می‌تواند به حدی پیچیده باشد که مدل احتمال داده‌های خروجی از دید سخت بودن بررسی آن، کماکان ناشناخته باقی بماند. از این روست که محاسبه ویژگی‌های توزیع احتمال Y یا همان بردار θ از طریق تخمین $(\hat{\theta})$ ، آن هم با توسل به روش مونت کارلو دنبال می‌شود.

در هر دور شبیه‌سازی، « T » عدد تصادفی تولید می‌شود که در نهایت به همین تعداد داده خروجی می‌انجامد. اما، برای دستیابی دقیق به پارامترهای مشخصه توزیع احتمال مورد بررسی، به بیش از یک دور شبیه‌سازی نیاز است (N). محاسبات مونت کارلو آسان است و با هر دور تکرار صحت و دقت آن بیشتر می‌شود، اما سرعت این بهبود بسیار کم است. برای مثال؛ اگر هدف، بالا بردن درجه دقت تا یک رقم اعشار باشد، باید ۱۰۰ دور شبیه‌سازی تکرار شود ($N=100$) و اگر ارتقای آن تا ۳ رقم اعشار مدنظر است، تعداد دورهای لازم تکرار شبیه‌سازی یک میلیون دفعه می‌باشد. دلیل بروز این ایراد استفاده از الگوریتم خلق اعداد تصادفی پس‌دو است که اگرچه تصادفی است، اما چنان مورد نیاز است که یکنواخت به نظر نمی‌رسد. رفع این نقص و کاستی، با استفاده از الگوریتم‌هایی ممکن گشته‌است که قادر است سری اعدادی را تولید کند که در فاصله‌ای معین، و به‌طور یکنواخت توزیع شده‌است. به این سری از اعداد به دلیل شیوه‌ای که در تولید آنها اعمال می‌شود، به اصطلاح اعداد «شبه تصادفی» می‌گویند و آن شبیه‌سازی که این اعداد را مورد استفاده قرار می‌دهد نیز، شبه مونت

۳- شبیه‌سازی شبه مونت کارلو

این مسئله هم به‌طور نظری و هم به‌طور تجربی ثابت شده‌است که در بیشتر مواقع، خطاهای شبیه‌سازی با روش مونت کارلو سنتی، بسیار بیش از روش شبه مونت کارلو است و از طرف دیگر؛ استفاده از اعداد پس‌دو - به دلیل اشاره شده در بالا - نرخ تصحیح انحراف کمی را نیز برای این شبیه‌سازی به ارمغان می‌آورد. در بسیاری از مسایل تجربی نظیر مواردی که در علوم مالی با آنها سر و کار داریم، محاسبه معیارهای مورد نظر، در واقع نوعی تخمین انتگرال چندگانه یک تابع چندبعدی (چند متغیره) است (برای مثال؛ تابع تسویه قراردادهای حق انتخاب^۱ با متغیرهایی که ارزش آنها از یک تابع چگالی فرضی تبعیت می‌کند). در این نوع از کاربرد، ممکن است مهم نباشد که برخی از ویژگی‌های آماری مانند استقلال، به جای برخورداری از سرعت همگرایی بالاتر، فدا شوند. در این طبقه از مسایل، ایده‌ی به کارگیری سری‌های اغتشاش درجه کم^۲، مطرح شد. این ایده، پایه اولیه ساخت سری اعداد، شبه تصادفی را تشکیل می‌دهد. برای کاربردهایی که وجود ویژگی استقلال از ضروریات است، از یک تبدیل دیگر با نام «سری‌های شبه تصادفی ادغامی» استفاده می‌شود که در بخش بعدی این گزارش به آن مورد نیز اشاره خواهد شد. بنابراین، در این بخش ابتدا به معرفی شبیه‌سازی شبه مونت کارلو خواهیم پرداخت.

همان‌طور که اشاره شد، اعداد شبه تصادفی دارای ویژگی اغتشاش از درجه کم هستند. این خصوصیت یک معیار برای اندازه‌گیری یکنواختی توزیع نقاط است. در واقع، این شاخص نشان‌دهنده عدم وجود فضاهای خالی بزرگ یا خوشه‌شدگی^۳ داده‌ها (نقاط) در صفحه یا حجم‌های مختصات است. در حقیقت، در این تعریف

1- Options Payoff Function
3- Clustering

2- Low Discrepancy Sequences

مفهوم اغتشاش به جای واریانس برای توضیح دادن میزان پراکندگی نقاط آمده است.^۱ خوشبختانه، اگر کاربر دانش اولیه را داشته باشد و بداند چه وقت و چگونه از این سری ها استفاده کند، دانستن جزئیات فنی برای ایجاد یک شبیه سازی خوب و مناسب لازم نیست.

مفهوم اغتشاش کم به این معنی است که اعداد متوالی به گونه ای دنبال یکدیگر قرار می گیرند که تا حد ممکن از اعداد دیگر دور باشند. یعنی؛ تا جایی که امکان دارد از تجمع و خوشه شدگی نقاط جلوگیری می شود. خلاصه ای از ساده ترین روش دستیابی به این اعداد که توسط وان در کرپوت^۲ آرایه شده، به صورت زیر است:

۱- تعداد اعداد لازم در سری در حال شبیه سازی تعیین می شود (برای مثال؛

$$(T=100)$$

۲- تمام اعداد عضو مجموعه $\{0+k, 1+k, 2+k, \dots, T-1+k\}$ که در آن k عددی

مثبت و انتخابی است، در پایه b که یک عدد اول است، نوشته می شود (برای مثال؛ ۴ همان عدد ۱۰۰ در پایه ۲ است).^۳

۳- اعداد محاسبه شده در پایه b چپ و راست نوشته می شود (برای مثال؛

$$(100 \rightarrow 001)$$

۴- عددهای به دست آمده در مرحله ۳ یک بار دیگر در پایه ده دهی محاسبه

می شود (برای مثال؛ $001 \rightarrow 0125$).

۵- بدین ترتیب سری ای از اعداد در فاصله $(0, 1)$ به دست می آید که گرچه

تصادفی نیست، اما به طور یکنواخت در طول این فاصله توزیع شده اند.

همان طور که به وضوح مشخص است، با تغییر دادن مقادیر k و b می توان

۱- جالب است بدانیم که اعداد شبه تصادفی توسط نظریه پردازان ریاضی در مبحث نظریه اعداد مطرح شد نه توسط آماردانان.

2- Van der Corput

۳- جزئیات کرپوت، $b=2$ است.

سری‌های شبه تصادفی دیگری ساخت که همگی دارای طول T بوده و در دامنه $(0, 1)$ به‌طور یکنواخت، توزیع شده‌باشد. این عمل، در مسایل چند متغیری و برای تکرار شبیه‌سازی‌ها ضرورت دارد.

مطابق مطالب آمده در بخش‌های فوق، تمام کسانی که با شبیه‌سازی کار می‌کنند، نگران اندازه خطاهای عددی و میزان زمان لازم شبیه‌سازی مطلوب هستند. هر دوی این معیارها با نرخ همگرایی به ارزش حقیقی شبیه‌سازی به واسطه افزایش تکرارها (یا همان N) در ارتباط است. از این‌رو، روش شبیه‌سازی شبه مونت کارلو به این دلیل که انتظار می‌رود، از نرخ همگرایی بالاتری برخوردار باشد، کاربرد پیدا کرده‌است. اما به هنگام استفاده از این روش، باید به چند نکته توجه داشت:

● درست است که شبیه‌سازی مونت کارلو سنتی، دارای نرخ همگرایی به سنت کمی است، اما؛ این نرخ با افزایش یا کاهش ابعاد مسئله (تعداد متغیرها) [که با d نشان داده می‌شود]، تغییر نمی‌کند و فقط با افزایش تکرارها، کاهش می‌یابد.

● نرخ همگرایی شبیه‌سازی شبه مونت کارلو، در دامنه (بدترین حالت، بهترین حالت) قرار دارد. بهترین حالت تابعی از تعداد ابعاد مسئله نیست. اما:

● بدترین حالت با افزایش d افزایش می‌یابد. به‌طوری‌که؛

● بالاخره فایده استفاده از این روش از بین می‌رود. این اتفاق در $d=5$ می‌افتد.^۱

با این حال در کاربردهای مالی، به دلیل استفاده از توابع هموار برای تنزیل جریان عایدی‌ها، احتمال وقوع نتایج شبیه‌سازی شبه مونت کارلو در نزدیکی بهترین

۱- این نتیجه برای سری‌های شبه تصادفی کربوت مصداق دارد. سایر سری‌های شبه تصادفی نظیر هالتون Halton، سوبول Sobol، فایورر Faure و نایدرااینر Niederreiter وجود دارد، که عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد. برای مثال؛ سری هالتون به راحتی تا ۱۴ قابل استفاده است.

حالت (که همواره از نتایج مونت کارلو سنتی بهتر است) بالاست.^۱ علی‌رغم این توضیح، دانشمندان و محققان پیوسته به دنبال روش‌ها و متدهای جایگزین بوده‌اند. شیوه شبیه‌سازی [شبه] مونت کارلو ادغامی به این منظور برای اولین بار توسط کافلیش، موروکوف و اُون^۲ در سال ۱۹۹۷ معرفی شد. در ادامه به صورتی گذرا مطالبی آمده است.

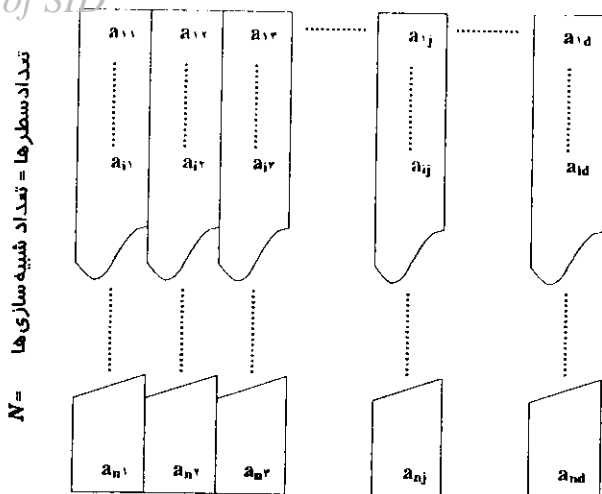
۴- شبیه‌سازی مونت کارلو ادغامی

در روش پیشنهادی کافلیش و دیگران، به‌طور ساده از سری‌های شبه تصادفی، برای ابعاد اصلی و از سری‌های تصادفی پس‌دو برای سایر ابعاد استفاده شده است. ایده اصلی این است که از دقت روش شبه مونت کارلو برای آن گروه از متغیرها که از اهمیت بالاتری برخوردارند (در حالی که تعداد ابعاد زیاد است)، بدون اینکه تحت‌تاثیر افزایش ابعاد قرار گیرد، بهره گرفته شود. اما در بسیاری از موارد، تفکیک متغیر پر اهمیت از کم‌اهمیت به این آسانی امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر، در برخی موارد در مباحث مالی نیز وجود استقلال بین سری اعداد شبیه‌سازی شده، بسیار مهم است. در این‌گونه حالات باید به دنبال روش دیگری بود.

ساده‌ترین راه در هم آمیختن ویژگی‌های بین زمانی سری‌های شبه تصادفی با الزامات استقلال، استفاده از انتقال تصادفی بردارهایی با درجه اغتشاش کم است. شکل زیر به درک بهتر موضوع کمک می‌کند. هر ستون بیانگر یک بردار شبه تصادفی مشخص است. تعداد این بردارها نشان‌دهنده بعد مسئله یا همان d می‌باشد. تعداد عناصر درون هر بردار یا تعداد سطرها، برابر تعداد شبیه‌سازی‌ها یا همان مسیرهای نمونه است. حال، برای مثال؛ می‌خواهیم سری $a_{1d}, a_{1d-1}, \dots, a_{12}, a_{11}$ از خصوصیت استقلال تبعیت کند.

۱- اثبات این مطلب خارج از حوصله این گزارش است. در گزارش‌های بعدی به آن پرداخته خواهد شد.

2- Cafilisch, Morokoff & Owen



در مونت کارلو ادغامی، تمام بردارهای موجود سری های شبه تصادفی ای نظیر سری وان در کرپوت هستند که به طور تصادفی بُر خورده اند و از نو به شکلی دیگر در توالی هم آورده شده اند. به طور خلاصه:

۱- یک سری شبه تصادفی با درجه اغتشاش کم (نظیر سری وان در کرپوت در پایه ۲ به عنوان ساده ترین آنها) با N عنصر ایجاد و از آن به شکل بردار پایه استفاده می شود.

۲- d تبدیل تصادفی از بردار پایه ساخته و به کار گرفته می شود.^۱

ایده اصلی در این روش شکستن همبستگی موجود بین عناصر سری های شبه تصادفی است. به این ترتیب بردار (سری) به دست آمده ویژگی اغتشاش کم خود را حفظ می کند، همبستگی میان عناصر از بین می رود، اعداد کماکان در دامنه (۱ و ۰) قرار می گیرند و ویژگی توزیع یکنواخت پابرجا می ماند.^۲ در حال حاضر شیوه های دیگری نیز بدین منظور توسط محققان ارایه شده که به دلیل پیچیده بودن از ذکر آنها

۱- ایده دیگر این است که برای هر بردار ابتدا یک بردار پایه جداگانه (کرپوت پایه ۲ برای اولی، کرپوت پایه ۳ برای دومی، ...) ایجاد شود و پس از آن تبدیل تصادفی هر یک به دست آید.

۲- البته نشان داده شده است که تمامی این نتایج در حالتی که N با d مساوی است و یا حتی از آن کوچک تر نیز است، حاصل نمی شود؛ لذا به عنوان شرط لازم N باید از d بزرگ تر باشد.

صرف نظر شده است.

تا اینجا هر آنچه مرور شد در جهت ایجاد شناختی هرچند مختصر از یک مجموعه از شیوه‌های شبیه‌سازی، موسوم به گروه مونت کارلو، قرار داشت. اما از این پس |و در طول بخش بعد| به بررسی بیشتر موارد کاربرد و قابلیت‌ها و محدودیت‌های این شیوه‌ها در مباحث مالی پرداخته خواهد شد.

۵- کاربردها و ملاحظات

به‌طور کلی، سه نوع کاربرد برای شبیه‌سازی مونت کارلو در مباحث مالی مطرح است. اولین آنها در ارزشیابی ابزارهای مشتقه مالی است.^۱ در این مورد فرض می‌شود، ارزش دارایی‌هایی که بر مبنای آنها این مشتقات شکل گرفته است از یک روند براونی هندسی^۲ یا به عبارتی دیگر از توزیع لوگ نرمال، پیروی می‌کند. دومین کاربرد آن در ارزش‌گذاری یک ورقه قرضه که نرخ بهره مربوط به آن از یک فرایند گشت تصادفی^۳ تبعیت می‌کند، است. سومین و آخرین مورد استفاده، برآورد ارزش باریسک یک سبد دارایی متشکل از ابزار مالی است. این کاربرد از این جهت که هدف آن دستیابی به اطلاعاتی راجع به واریانس تغییرات ارزش سبد مالی است - نه محاسبه ارزش انتظاری آن - با دو نوع استفاده دیگر متفاوت است.

هرتز^۴ در سال ۱۹۶۳ برای نخستین بار زمینه‌های استفاده از روش مونت کارلو در شبیه‌سازی امور کسب و کار، از جمله امور مالی را معرفی کرد. از آن زمان به بعد، به کرات از این روش در مباحثی نظیر بودجه‌بندی سرمایه^۵، محاسبه ارزش‌های فعلی جریان‌های نقدی انتظاری آینده، محاسبه ریسک عدم تحقق جریان‌های نقدی آینده، قیمت‌گذاری انواع اوراق بهادار و ریسک‌های مربوطه، بهره‌گیری شده است. به منظور ایجاد درکی بهتر، ارایه یک مثال عملی در این مرحله بی‌فایده نخواهد بود.

۱- شامل دامنه وسیعی از حق انتخاب‌ها، به پستوانه دارایی‌هایی نظیر سهام، کالا، ارز و...

2- Geometrical Brownian Motion

3- Random Walk

4- Hertz

5- Capital Budgeting www.SID.ir

مدل قیمت‌گذاری بلک - شولز^۱ که در واقع یک نوع روش قیمت‌گذاری خنثی از ریسک^۲ است، قیمت مناسب یک حق انتخاب فروش را برابر ارزش فعلی عایدی انتظاری آن می‌داند. برای یک حق انتخاب فروش اروپایی^۳ داریم:

$$CP_0 = E \left[e^{-rT} (K - S_T)^+ \right]$$

که در آن CP ، S_T ، K و r به ترتیب نماد قیمت حق انتخاب فروش در زمان عقد قرارداد، قیمت انتظاری دارایی در موعد ذکر شده در توافقنامه، قیمت آینده دارایی که در زمان حاضر بر سر آن توافق شده است و نرخ تنزیل می‌باشد. $(X)^+$ نیز هم‌ارز $\max(X, 0)$ است. بلک و شولز جهت محاسبه این انتظار برای قیمت دارایی مورد بررسی، فرایند براونی هندسی را در نظر گرفتند:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

که در آن $dW(t)$ بیان‌کننده یک فرایند به شکل $\varepsilon dt^{1/2}$ موسوم به فرایند واینر^۴ است (ε دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد). به این ترتیب، قیمت پیشنهادی بلک - شولز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$CP_t(S_t, T-t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

که در آن

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

1- Black-Scholes Pricing Model

2- Risk-Neutral Pricing

۳- در اصل سه نوع حق انتخاب بسته به نحوه محاسبه عایدی و موعد انتخاب مقرر شده در آن، وجود دارد که به حق انتخاب‌های اروپایی، آمریکایی و آسیایی معروف است.

4- Wiener Process

$$d_T = \frac{\log(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

است و $N(d_i)$ ارزش تجمعی توزیع یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد با ارزش d_i می باشد.

بنابراین روش عمومی در استفاده از شبیه سازی برای یافتن قیمت حق انتخاب مشخص است:

۱- مسیرهای نمونه از قیمت دارایی و نرخ های بهره در طول افق زمانی مورد بررسی، شبیه سازی می شوند.

۲- جریان های نقدی تنزیلی از یک ورقه بهادار براساس هر یک از مسیرهای نمونه به دست می آید.

۳- از این جریان های تنزیلی میانگین گرفته می شود.

جهت شبیه سازی قیمت دارایی ها با استفاده از مدل بلک - شولز، باید نسخه هایی مستقل از قیمت دارایی در زمان $t + \Delta t$ را از رابطه زیر به دست آورد:

$$S_{t+\Delta t}^{(i)} = S_t \exp(r - \sigma^2 / 2) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z^{(i)}$$

$i = 1, \dots, n$ (تعداد تکرارها)، σ انحراف معیار دارایی و $Z^{(i)}$ ارزش آمده از یک توزیع نرمال استاندارد می باشد که می توان آن را از طریق یکی از شیوه های ذکر شده در بالا، شبیه سازی کرد. سپس این ارزش ها یک به یک در رابطه CP_i قرار داده می شود و از نتایج آن میانگین گرفته می شود.

مسئله اصلی در کاربردهای تجربی این است که در اکثر مواقع فرض می شود جزء تصادفی دارای توزیع نرمال است و همبستگی بین پیشامدها، صفر است. همین

امر باعث شده است برخی از محققان (مثل لولین و لانگ^۱ در سال ۱۹۷۲) بیان کنند که شبیه‌سازی‌های گروه مونت کارلو، در ایجاد اطلاعات مرتبط با مبحث، ناتوان هستند. از طرف دیگر، سایر منتقدان، نیاز این روش‌ها به یک مدل تحلیلی ریاضی را دلیل ضعف آن می‌دانند و از پیچیده و وقت‌گیر بودن آن انتقاد دارند. زیرا اعتقاد دارند بهره‌ای که با استفاده از این روش به دست می‌آید (در مقایسه با سایر روش‌ها) نسبت به هزینه‌های انجام آن کم است و در واقع، صرف نمی‌کند. فیلیپتاتوس^۲ در سال ۱۹۷۳ و می‌یرز^۳ در سال ۱۹۷۶ و روبین اشتین^۴ در سال ۱۹۸۱، مجموعه‌ای از مرزهای تشخیص را معرفی کردند که در تصمیم‌گیری پیرامون مناسب یا نامناسب بودن استفاده از گروه مونت کارلو، راه‌گشا است. مطابق نظر وی استفاده از این روش‌ها در صورت وجود شرایط زیر مجاز و مفید است:

- دستیابی و جمع‌آوری داده‌ها غیرممکن و یا گران باشد.
- سازمانه مشاهده شده بسیار پیچیده باشد.
- راه‌حل‌های تحلیلی را به راحتی نتوان به دست آورد.
- اثبات و کشف یک یافته ریاضی مربوط به حل مسئله مشکل، غیرممکن و یا هزینه‌بر باشد.

مطالعه ریس و ساتکلیف^۵ در سال ۱۹۹۳ نیز یک بار دیگر بر موارد فوق تاکید کرد و خاطرنشان ساخت که اگر هیچ ابزار دیگری به کار نیاید این روش بسیار مفید خواهد بود. این مطالعه، همچنین بیان کرد که این روش در تحقیقات مالی نتایج خوبی می‌دهد. چایو و نردهاوزر^۶ نیز در سال ۱۹۹۵، ضمن مرور دقیق ادبیات شبیه‌سازی و تحقیقات بودجه‌بندی، مفید است. اِونسکی^۷ در سال ۲۰۰۱ نشان داد، شبیه‌سازی مونت کارلو راهی موثر در آموزش برخوردار با «ابهام موجود در اندازه ریسک» به مردم

1- Lewellen & long
3- Myers
5- Rees & Sutcliffe
7- Evensky

2- Philiptatos
4- Rubin Stein
6- Chau & Nordhauser

است؛ اما به کارگیری آن در مسایل جدی و حقیقی، کار ساده‌ای نیست و باید با احتیاط زیاد انجام پذیرد.

از مواردی که کار با گروه مونت کارلو را دشوار می‌گرداند، این است که در اغلب موارد، ارتباط درونی‌ای که به‌طور طبیعی بین دو یا چند متغیر وجود دارد، بسیار پیچیده و در نتیجه، تعیین ارتباط دقیق و توزیع درست متغیرها مشکل است. ارتباط بین دو متغیر را می‌توان با ضریب همبستگی^۱ که میزان ارتباط و مثبت و منفی بودن آن را بیان می‌کند، نشان داد. در کل، سه نوع همبستگی وجود دارد.

۱- **همبستگی متقاطع (ضربدری)**^۲: ارتباط دو متغیر مثل درآمد ملی و سرمایه‌گذاری را نشان می‌دهد.

۲- **همبستگی سریالی (با وقفه)**^۳: ارتباط بین دو مقدار از یک متغیر را که متعلق به دو زمان متفاوت هستند، مانند قیمت خودرو در اردیبهشت ۱۳۸۱ و فروردین ۱۳۸۱ (یا اردیبهشت ۱۳۸۰) را بیان می‌کند.

۳- **همبستگی متقاطع - سریالی**: ارتباط بین ارزش دو متغیر که زمان‌های منتسب متفاوتی دارند را می‌رساند (درآمد ملی امسال و سرمایه‌گذاری سال گذشته). برای ساختن مدلی نزدیک به حقیقت، باید بیش از یک همبستگی شناسایی شود. تا زمانی که همه ارتباط‌ها از نوع متقاطع است، مونت کارلو جوابگوست، اما در حالت وجود همبستگی زمانی، باید توجه داشت که نمی‌توان شبیه‌سازی مونت کارلو را با فرض «عدم وجود همبستگی پیشامدهای تصادفی» آن (که استفاده از آن عمومیت نیز دارد)، به کار برد. بنابراین، محققى که می‌خواهد با این ابزار کار کند، بسیار دشواری دارد. زیرا؛ از طرفی نیازمند دقت فراوان برای گریز از ساده‌انگاری و افتادن در دام اشتباه‌های ناشی از آن است و از طرف دیگر، هم‌سو ساختن ویژگی‌های شبیه‌سازی - به‌طوری که بر تمامی پیچیدگی‌ها فایز آید - سخت می‌باشد. این

1- Correlation Coefficient

2- Cross Correlation

3- Serial Correlation

دشواری‌ها، با اضافه شدن واقعیت‌هایی نظیر امکان وجود همبستگی‌های غیرخطی بین متغیرها (که در بازارهای سهام و ارز قابل مشاهده است) و متغیرهایی که در طول زمان ویژگی‌های توزیع احتمال آنها عوض می‌شود^۱، بیش از پیش می‌شود. در این‌گونه مواقع شیوه‌ی دیگری از شبیه‌سازی، نظیر شبیه‌سازی پی‌گردی با استفاده از داده‌های تاریخی، به کمک مونت کارلو می‌آید.

۶- سایر تحولات

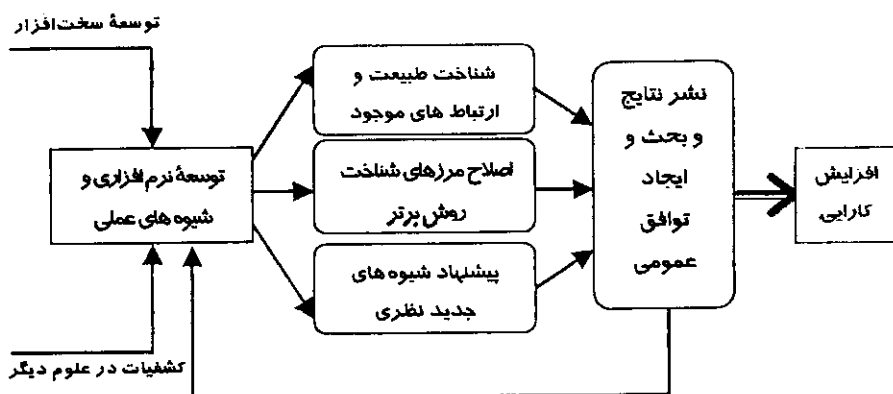
امروزه با پیشرفتی که در قدرت محاسباتی رایانه‌های شخصی رخ داده و تداوم آن نیز متصور است، شاهد رشد روزافزون استفاده از این ابزار در اجرای شبیه‌سازی‌های دقیق‌تر و در عین حال پیچیده‌تر هستیم که تا قبل از آن، غیرممکن می‌نمود.

برنامه‌نویسان رایانه‌ای، هر روز قابلیت‌های جدیدی را به نرم‌افزارهای تولیدی خود می‌افزایند که این ابزار را بیشتر از گذشته از حیث کاربری ساده و با یافته‌های دانشگاهی این حرفه سازگار می‌سازد. همین امر باعث گشته تا تحلیل‌گران، محققین و دانشگاهیان با سرعت بیشتری، رازهای نهفته دیگری از دامنه توانایی‌ها و کاستی‌های روش‌های رقیب، ویژگی‌های طبیعی پدیده مورد مطالعه و ارتباطات درونی بین متغیرها را کشف و نشر نمایند. به این ترتیب، روز به روز بر درجه تطابق الگوهای نظری با دنیای حقیقی و پیچیده افزوده می‌گردد. در این مرحله نوبت نقش‌آفرینی مجدد برنامه‌نویسان در خلق بسته‌های نرم‌افزاری، هم‌پا با دانش نظری موجود است. بنابراین، چرخه پیشرفت تکمیل می‌شود و تداوم می‌یابد.

به این ترتیب، پیش‌بینی می‌شود که در آینده نزدیک شاهد افزایش کمی و کیفی بهره‌گیری به‌جای شیوه‌های شبیه‌سازی دقیق‌تر، گسترش دامنه استفاده از آنها به سمت حوزه‌های دیگر، تحول در روش‌شناسی شبیه‌سازی (هم در تعداد و نحوه

۱- این حالت در اصطلاح «بی‌ثباتی در توزیع» یا Non-Stationary in Distribution نامیده می‌شود که در اقتصاد و مالیه وجود دارد.

طبقه‌بندی‌ها و هم در معیارها و نتایج مقایسه روش‌های موجود برای انتخاب شیوه مناسب، و تثبیت جایگاه شبیه‌سازی و تکمیل ابزارهای کمکی آن خواهیم بود. شمای زیر، آنچه را که تاکنون اتفاق افتاده و همچنین انتظار می‌رود که ادامه یافتن آن نیز به نتایج ذکر شده در فوق بیانجامد، به‌طور خلاصه ترسیم کرده‌است:



نتیجه‌گیری

حدود پنجاه سال است که محققان و فعالان علوم و فنون مختلف به‌طور جدی - بسته به نیازی که احساس می‌کنند - سرگرم کار با روش‌های گوناگون شبیه‌سازی پدیده‌های دنیای حقیقی مورد توجه خود هستند. از انواع روش‌های شبیه‌سازی، روش مونت کارلو جهت ایجاد داده‌هایی که هنوز اتفاق نیفتاده است و باید پیش‌بینی شود و یا به دلیلی ثبت نشده، و دستیابی به آنها سخت و بسیار هزینه‌بر است، به کار می‌آید. از آنجایی که این روش بر مبنای ساخت اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت پایه‌گذاری شده‌است، الگوریتم‌های مختلفی که به این منظور طراحی شده‌است را، مورد استفاده قرار می‌دهد. اما، هیچ‌کدام از این الگوریتم‌ها صد در صد در ایجاد چنین سری اعدادی موفق عمل نمی‌کنند. پرکاربردترین آنها یعنی محاسب اعداد تصادفی

پسند، در برقراری یکنواختی در توزیع اعداد تصادفی ضعف دارد. همین امر سبب می‌شود تا دفعات محاسبه برای بالا رفتن درجه اطمینان و در نتیجه هزینه‌ها و زمان انجام آن، به شدت افزایش یابد. به این دلیل، شبیه‌سازی شبه مونت کارلو که از مولدهای اعداد با درجه اغتشاش کم بهره می‌برد، کاربرد پیدا کرد. اما، این روش نیز کارایی خود را در مورد مسائلی با تعداد متغیر بالا و در بررسی موضوعاتی که در آنها حفظ استقلال بین پیشامدها و متغیرها حیاطی است، از دست می‌دهد. از این‌رو، روش مونت کارلو، ادغامی پیشنهاد شد.

به‌طور کلی، کاربردهای متعددی برای این گروه از شبیه‌سازی در مباحث مالی وجود دارد و به کرات شاهد بهره‌گیری از آنها در موضوعاتی نظیر؛ بودجه‌بندی سرمایه، قیمت‌گذاری دارایی‌های مشتقه، برآورد عدم اطمینان و ریسک‌های مالی، جریان‌های نقدی و از این دست هستیم. اما باید توجه داشت که نباید در استفاده از این روش دچار افراط و تفریط یا ساده‌انگاری و سردرگمی شد. محققانی که خواهان بهره‌گیری از توانایی‌های این روش است، باید به تمامی نقاط ضعف آن نیز واقف باشد، موارد اثرگذار بر کارایی آن را بشناسد، به روش‌های بدیل و جایگزین آن اشراف داشته باشد، راه‌های تعدیل آن را بسته به شرایط مختلف و پیچیدگی‌های موجود مدنظر قرار دهد، و بتواند نتایج حاصل از آن را تحلیل کند. لذا کار با این روش، هیچ‌گاه - به سادگی - آنچه که ممکن است در ابتدای آشنایی با آن به نظر آید، نیست.

اما از طرف دیگر، پیشرفت‌های اتفاق افتاده در عرصه فن‌آوری‌های محاسباتی، باعث‌گشته تا ضمن لحاظ کردن یافته‌های جدید بتوان سرعت شبیه‌سازی را بالا برد. این پیشرفت‌ها از طرف دیگر، افزایش حجم مطالعات و بهبود کیفیت آنها را موجب خواهد شد و گسترش بهره‌گیری در حوزه‌های جدید را ممکن خواهد ساخت. این واقعیت، مرزبندی، طبقه‌بندی و رتبه‌بندی‌های دیگری را در بین روش‌های موجود باعث خواهد شد و به خلق روش‌ها، مدل‌ها و ابزار دقیق‌تر و کارآمدتر کمک خواهد کرد. همه این پیامدها، به تثبیت هرچه بیشتر جایگاه روش‌های مختلف شبیه‌سازی خواهد انجامید.

- 1- Banks. J, Chair. P, "Simulation in the Future". In *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*. ed, J.A. Joines, R.R. Barton, K.Kang, and P.A. Fishwick, U.S.A, 2000.
- 2- Charnes. J.M, "Using Simulation for Option Pricing". In *Proceedings of the 2000 RR.Barton, K. Kang, and P.A. Fishwick. School of Business the University of Kansas Lawrence, U.S.A, 2000.*
- 3- Hilgers. G.M, "Quasi-Monte Carlo Methods in Cash Flow Testing Simulations". In *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*. ed, J.A. Joines, RR. Barton, L. Kang, and 325 Computer Science 1870 Miner Circle, 2000.
- 4- Caffisch R.F., Morokoff W., and Owen A.B., "Valuation of Mortgage. Backed Securities Using Brownian Bridges to Reduce Effective Dimension". *The Journal of Computational Finance*. Vol.1, No.1, 1997.
- 5- Munshi. J, "Monte Carlo Simulation in Finance". *Sonoma State University, Working Paper, 1994.* <http://munshi.sonoma.edu/working/simulation.html>
- 6- Nawrocki. D, "Finance and Monte Carlo Simulation", *Journal of Financial Planning*, November 2001.
- 7- Schmeiser. B.W. "Some Myths and Common errors in Simulation Experiments, In *Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference*", ed.B.A. Peters, J.S. Smith, D.J. Medeiros, and M.W. Ronrer, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, 2001, U.S.A.
- 8- Li.J.X, Winker. P. "Time Series Simulation With Quasi Monte Carlo Methods", Departments of Mathematics and Economics, Pennsylvania State University, University Park, U.S.A, 2000.
- 9- H. Evensky, "Heading for Disaster". *Financial Advisor*, April 2001.
- 10- D.Hertz, "Risk Analysis in Capital Investment", *Harvard Business Review*, January-February 1964, Vol.42.
- 11- W.G. Lewellen and M.S. long, "Simulation Versus Single-Value Estimates in Capital Expenditure Analysis". *Decision Sciences*, 1972, Vol.3, Reprinted in Myers, 1976.
- 12- S. Myers, "Postscript: Using Simulation for Risk Analysis". *Modern Developments in Financial Management*, S. Myers, ed. New York: Praeger Publications 1976.

Archive of SID

- 13- G.C. Philippatos, *Financial Management: Theory and Techniques*, San Francisco: Holden Bay, 1973.
- 14- W.Rees and C. Sutcliffe, "Mathematical Modelling and Statistic Simulation of accounting Alternatives", *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol.20, No.3.
- 15- R.Y.Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, New York: John Wiley and Sons, 1981.
- 16- <http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim-stoc-proc.html>