فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال هشتم، شماره ۲۱، تابستان ۹۰
صفحات ۳۹ تا ۶۱

لگوریتمی جهت حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر مبتنی بر قوانین مدارهای الکتریکی

علی خاتمی فیروزآبادی *
حسین محبی **
محمد زارعی محمود آبادی ***

کیده

مسئله کوتاه‌ترین مسیر یکی از مسائل معروف بهینه سازی می‌باشد که توسط دانشمندان زیادی مورد العه قرار گرفته است. از جمله کاربردهای این مسئله در زمینه‌های ارتباطی و حمل و نقل است که عموماً سط الگوریتم دیجسترا (نشانه گذاری) حل می‌شود. در این مقاله دو حوزه علمی مجزای الکترونیک و یق در عملیات به هم ارتباط داده شده است تا الگوریتم جدیدی جهت یافتن جواب بهینه مسئله تاه‌ترین مسیر با استفاده از قوانین و شبکه‌های الکتریکی پدید آید. الگوریتم پیشنهادی قادر به حل مسئله تاه‌ترین مسیر در گراف‌های جهت دار و بدون جهت و همچنین حل مسائل طولانی‌ترین مسیر در اف‌های جهت دار می‌باشد. در این الگوریتم از شبکه‌های الکتریکی بدین طریق استفاده می‌شود که ار مقاومت الکتریکی هر شاخه معادل با وزن هر یال در مسئله کوتاه‌ترین مسیر فرض می‌شود. سپس با اده از قوانین اهم و ولتاژ کیرشهف (KVL)، جریان در هر حلقه محاسبه می گردد. پس از آن ه‌هایی که دارای بیشترین جریان عبوری هستند مشخص شده که در نتیجه طبق قانون اهم دارای کمترین مت یا کمترین وزن در مسئله کوتاه‌ترین مسیر می‌باشند. بدین ترتیب کوتاه‌ترین مسیر در شبکه به‌دست آید. از مزایای این الگوریتم هم‌گرایی سریع تر به جواب و زمان محاسبات کمتر نسبت به روش‌های وم به خصوص در شبکه‌هایی با تعداد گره‌های زیاد می‌باشد. الگوریتم مزبور برای سه مثال تشریح یده است.

گان کلیدی: کوتاه‌ترین مسیر، مدارهای الکتریکی، قانون اهم، قانون KVL، مقاومت، جواب بهینه

---

* ادیار دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران(مسئول مکاتبات)
Email: a.khatami@atu.ac.ir
** ارشناس ارشد مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران ایران.
*** کارشناس ارشد مدیریت صنعتی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

خ دریافت: ۸۸/۹/۲۳ تاریخ پذیرش: ۸۹/۲/۱۸

مقدمه

بسیاری از مسائل مهم بهینه‌سازی می‌توانند از طریق نمایش گرافیکی یا شبکه‌ای بهتر تجزیه و تحلیل شوند. در نظریه گراف، مسئله یافتن کوتاه‌ترین مسیر در واق مسئله یافتن مسیری بین دو رأس (یا گره) در یک شبکه است به گونه‌ای که مجمو وزن یال‌های تشکیل دهنده آن کمینه شود [۱]

شبکه یا گراف خطی شامل تعدادی گره یا نقاط اتصال است که برخی یا تما آن‌ها به وسیله شاخه‌ها یا کمان‌هایی به هم وصل شده‌اند. مسیر[1] بین دو گره عبارت است از مجموعه شاخه‌های متوالی مشخص، که آن دو گره را به هم متصل می‌کند هنگامی که تمام شاخه‌ها یا بعضی از آنها در شبکه جهت‌دار باشند، بین مسی جهت‌دار یا بدون جهت می‌توان تفاوت قائل شد. مسیر جهت‌دار از گره i به گره مسیری است که شاخه‌ها در جهت j باشند به طوری که جریان از گره i به طرف در این مسیر انتقال یابد اما مسیر بدون جهت از گره i به گره j عبارتست ا شاخه‌های متوالی که جهت آنها به طرف گره j یا در جهت مخالف آن باشد [۳].

فرض کنید به هر یال گراف G به نام e عددی نسبت داده شود، در این صورت عدد نسبت داده شده وزن هر یال و چنین گرافی، گراف وزن‌دار نامیده می‌شو (داگلاس، ۲۰۰۱). این اعداد در کاربردهای متفاوت می‌توانند تعبیرهای مختلف داشته باشند، مثلاً می‌توانند مقدار هزینه سفر از نقطه‌ای به نقطه دیگر یا معرف مخارج ساختن یا نگه‌داری خط‌های ارتباطی مختلف، یا مسافت بین دو شهر باشن به عنوان مثال شبکه راه آهنی را تصور کنید که شهرهای مختلف را به هم وص می‌کند، هدف پیدا کردن مسیر با حداقل وزن است که دو شهر (رأس) را به ه وصل می‌کند. در این مثال وزن‌ها معرف فاصله‌ها هستند [۱۸]. الگوریتم جدیدی ک در این مقاله ارائه می‌شود برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف با وزن‌های مثبت س و کار دارد که نه تنها کوتاه‌ترین فاصله بین مبدا تا مقصد، بلکه کوتاه‌ترین مسیر بی هر دو رأس دل‌خواه گراف را نیز تعیین می‌کند. در این الگوریتم از مدارها (شبکه‌های) الکتریکی بدین صورت استفاده می‌شود که مقدار مقاومت الکتریکی ه

---

1. Path

شاخه معادل با وزن هر یال در مسئله کوتاه‌ترین مسیر (مسافت، هزینه و ...) فرض می‌گردد و با استفاده از قوانین ولتاژ کیرشهف (KVL)، جریان هر شاخه محاسبه می‌شود. سپس شاخه‌هایی که به ترتیب از گره مبدا به مقصد دارای بیشترین جریان عبوری هستند، مشخص شده که در نتیجه معادل کمترین مقاومت یا کمترین وزن در مسئله کوتاه‌ترین مسیر خواهد بود. به این ترتیب کوتاه‌ترین مسیر در شبکه به دست می‌آید.

پیشینه تحقیق

مسئله یافتن کوتاه‌ترین مسیر که یکی از مهمترین مسائل مطالعه شده در نظریه شبکه‌ها است برای اولین بار توسط فورد در سال ۱۹۵۶، فرمول بندی شد [۵] . در این راستا، الگوریتم‌های متعددی برای یافتن مسئله کوتاه‌ترین مسیر مطرح گردید که در ادامه مرور اجمالی به برخی از این الگوریتم‌ها و همچنین قوانین اهم و KVL در مدارهای الکتریکی خواهیم داشت.

الگوریتم دیجسترا [1]

الگوریتم دیجسترا (روش نشانه گذاری[2]) یکی از الگوریتم‌های پیمایش گراف است که توسط دانشمند هلندی علوم رایانه، دیجسترا در سال ۱۹۵۹ ارائه شد [۱۳]. این الگوریتم که بر اساس تکنیک حریصانه[3] نوشته شده، یکی از الگوریتم‌هایی است که مسئله کوتاه‌ترین مسیر از مبدأ واحد را برای گراف‌های وزن‌داری که یال با وزن منفی ندارند، حل می‌کند و در نهایت با ایجاد درخت کوتاه‌ترین مسیر، کوتاه‌ترین مسیر از مبدأ به همه رأس‌های گراف را به دست می‌آورد. همچنین می‌توان از این الگوریتم برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از مبدأ تا رأس مقصد به این ترتیب بهره جست که در حین اجرای الگوریتم به محض پیدا شدن کوتاه‌ترین مسیر از مبدأ به مقصد، الگوریتم را متوقف کرد [۸]. این الگوریتم برای گراف‌های

1- Dijkstra's algorithm
2- Labeling Method
3- Greedy

با یال با طول منفی و همچنین برای گراف‌های دارای حلقه منفی مطلقاً جواب صحیحی نمی‌دهد و باید از الگوریتم‌های دیگر نظیر الگوریتم بلمن ـ فورد که تعمیم یافته دیجسترا است و دارای پیچیدگی زمانی بیشتر است استفاده شود [۱۵].

از معایب دیگر الگوریتم دیجسترا این است که با افزایش تعداد گره‌ها، این الگوریتم پیچیده و ناکارآ می‌شود و نرم افزار حل آن، مقدار قابل توجهی از زمان CPU را مصرف می‌کند. همچنین اگر یک گره اطلاعات نادرستی را به گره‌های دیگر انتقال دهد، ممکن است تصمیمات مسیریابی در پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر اشتباه شود.

روش برنامه‌ریزی خطی کوتاه‌ترین مسیر

استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی برای حل مسائل واقعی مثل کوتاه‌ترین مسیر بین دو شهر، مستلزم به‌کارگیری تعداد زیادی متغیر و محدودیت است که برای حل آن می‌توان از روش سیمپلکس استفاده نمود. الگوریتم سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ به وسیله جرج بی. دانتزیگ[1] برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی ایجاد شد. مسئله کوتاه‌ترین مسیر در قالب یک برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر فرموله می‌گردد [۳].

$$Minimize\ Z = \sum_{i} \sum_{j \neq i} C_{ij} x_{ij}$$

$s.t.$

$$\sum_{k \neq j} x_{jk} - \sum_{k \neq j} x_{kj} = 1$$ اگر گره j مبدا باشد

$$\sum_{k \neq j} x_{jk} - \sum_{k \neq j} x_{kj} = 0$$ اگر گره j نه مبداو نه مقصد باشد

$$\sum_{k \neq j} x_{jk} - \sum_{k \neq j} x_{kj} = -1$$ اگر گره j مقصد باشد

$x_{ij} = 0$ یا 1

1- George B. Dantzig

مدل فوق بدون در نظر گرفتن جهت شاخه‌ها ارائه گردیده است. در هر شاخه، جریان از j به k و از k به j می‌تواند منتقل شود. اگر برگشت جریان از k به j میسر نباشد آنگاه X_{kj} مساوی صفر خواهد شد. در این مدل به تعداد گره‌ها، محدودیت و به تعداد شاخه‌ها، متغیر تصمیم وجود دارد.

هر چند این الگوریتم به خوبی کار می‌کند، اما توجه به این نکته ضروری است که زمان لازم برای انجام محاسبات در روش سیمپلکس از عوامل مختلفی تاثیر می‌پذیرد که تعداد محدودیت‌ها مهمترین نقش را در این ارتباط دارد. تجربه نشان داده است زمان محاسبات تقریباً به توان سوم تعداد محدودیت‌ها بستگی دارد لذا با افزایش تعداد گره‌ها (شهرها) و به تبع آن افزایش تعداد محدودیت‌ها، زمان محاسبات با روند غیرخطی افزایش می‌یابد [۱۵].

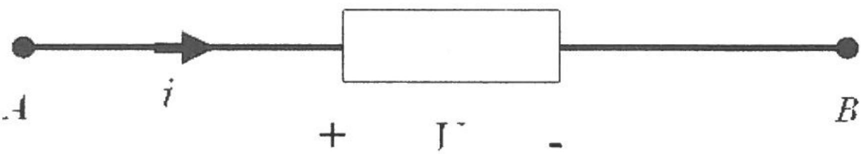
در زمینه به‌کارگیری الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر، از جمله تحقیقاتی که می‌توان به آنها اشاره نمود به شرح جدول ۱ است.

جدول ۱. پیشینه به کارگیری الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر

ردیف	عنوان تحقیق	موضوع مورد مطالعه	پدید آورنده
۱	مسئله کوتاه‌ترین مسیر با مسیرهای ممنوعه	استفاده از الگوریتم کوارسیک و روش انحراف مسیر مارتین برای حل مشکل مسیرهای ممنوعه در مسئله کوتاه‌ترین مسیر	۲۰۰۵ ویلنیو و دسالنیر، [۱۹]
۲	روشی نوین برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر و حداقل درخت پوشا	ارائه رویکردی خاص برای حل مسائل کوتاه‌ترین مسیر و حداقل درخت پوشا	پرنی و اسپانژار، ۲۰۰۵ [۱۷]
۳	الگوریتمی برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر وابسته به زمان	تعمیم روش کلاسیک کوتاه‌ترین مسیر به دو روش با در نظر گرفتن توابع هدف و داده‌های وابسته به زمان	همچر و همکاران، ۲۰۰۶ [۹]
٤	الگوریتمی جدید برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر با طول فازی در یک شبکه	ارائه روشی جدید برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با طول فازی گسسته	چانگ و کانگ، ۲۰۰٦ [٦]
۵	حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با پارامترهای فازی در شبکه‌ها	پیشنهاد الگوریتمی تکرار شونده برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با پارامترهای فازی	هرناندز و همکاران، ۲۰۰۷ [۱۰]
٦	روشی کاربردی برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر	استفاده از تئوری اندازه‌گیری برای حل برنامه ریزی کوادراتیک مسئله کوتاه‌ترین مسیر	ضمیریان و همکاران، ۲۰۰۷ [۲۱]
۷	مدلی جدید برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر با طول کمان‌های فازی	استفاده از الگوریتم هوشمند هیبرید برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با طول کمان‌های فازی	جی و همکاران، ۲۰۰۷ [۱٤]
۸	حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از روش PSO	بررسی کاربرد PSO برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌هایی با ۱۵ الی ۷۰ گره	محمد و همکاران، ۲۰۰۸ [۱٤]
۹	مسئله کوتاه‌ترین مسیر با شرایط احتمال ورود به موقع	ارائه الگوریتمی برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با در نظر گرفتن احتمال ورود به موقع	نایی و وو، ۲۰۰۹ [۱۱]
۱۰	مسئله کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از پالس‌های اصلاح شده شبکه عصبی	استفاده از الگوریتمی بر اساس شبکه‌های عصبی برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با مقیاس‌های بزرگ	وانگ و کیو، ۲۰۰۹ [۲۰]

شبکه‌ها و مدارها

اتصالات درونی دو یا چند عنصر ساده الکترونیکی یک مدار یا یک شبکه الکتریکی به وجود می‌آورد. اگر شبکه حداقل دارای یک مسیر بسته باشد آن را یک مدار الکتریکی می‌نامند [۴]. متغیرهای اساسی مورد نظر که در تحلیل مدار مورد نیاز است، ولتاژ و جریان در شاخه‌های مختلف مدار می‌باشد. مدار کلی در یک شاخه از مدار به صورت شکل زیر می‌باشد که برای این شاخه‌ها جهت قرار دادی برای ولتاژ و جریان آن به طور اختیاری انتخاب می‌شود.



شکل ۱. یک اتصال الکتریکی

هر عنصر مدار را می‌توان یک شاخه دو سر با جهت‌های قراردادی مطابق شکل فوق فرض کرد. طبق قرار داد، ورود جریان به قطب مثبت ولتاژ است [۷].

قانون اهم

قانون اُهم که به نام کاشف آن جرج اهم[1] نام گذاری شده است، بیان می کند که نسبت اختلاف پتانسیل (یا افت ولتاژ) بین دو سر یک هادی (و مقاومت) به جریان عبور کننده از آن به شرطی که دما ثابت بماند، مقدار ثابتی است [۷]

$$\frac{V}{I} = R$$

که در آن V، ولتاژ بر حسب ولت و I، جریان، بر حسب آمپر است. این معادله منجر به یک ثابت نسبی R بر حسب اهم می‌شود که مقاومت الکتریکی آن عنصر نامیده می‌شود.

معادله قانون اهم اغلب به‌صورت V= R.I بیان می‌شود، زیرا این معادله صورتی است که اکثر اوقات همراه مقاومت‌ها به‌کار برده می‌شود [۷]. این معادله بیان می کند

1- George Ohm

در صورتی که ولتاژ دو سر یک عنصر ثابت باشد، جریان عبوری از عنصر با مقاومت دو سر آن رابطه معکوس دارد. یعنی در یک مدار مقاومتی که دارای یک منبع ولتاژ ثابت می‌باشد، جریان بیشتری از مسیری که دارای مقاومت معادل کمتر است، عبور می کند.

قانون‌های مداری کیرشهف

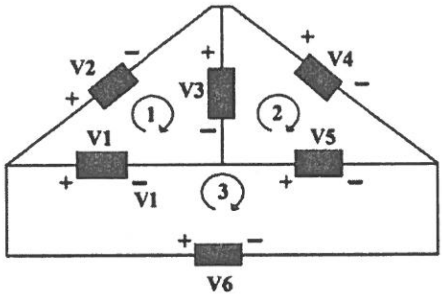
قانون‌های مداری کیرشهف، قوانینی است فیزیکی که از دو بخش تشکیل شده است [۲]:

الف ـ قانون جریان کیرشهف[1]: جمع جبری جریان‌هایی که به یک گره وارد می‌شود یا از آن خارج می‌شوند برابر با صفر است. این قانون به قانون KCL نیز معروف است.

ب ـ قانون ولتاژ کیرشهف[2]: در هر حلقه یا هر مدار بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل در عنصرهای مدار، برابر صفر است. این قانون به قانون KVL نیز معروف است.

جهت یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین دوگره توسط الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، ابتدا بایستی جریان در هر شاخه مدار محاسبه شود، بنابراین بهتر است از قانون KVL استفاده شود. قانون KVL را می‌توان به صورت‌های مختلف روی یک مدار اعمال کرد. روش معمول این است که روی مسیر بسته‌ای در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم و تمام ولتاژهایی که از آنها می گذریم را بنویسیم. هرگاه از طرف علامت مثبت ولتاژ وارد یک عنصر شدیم آن‌را مثبت و اگر از طرف علامت منفی وارد شدیم آن ولتاژ را با علامت منفی به حساب می‌آوریم [۴]. به عنوان مثال برای حلقه مدار شکل ۲ داریم:

1- Kirchhoff's Circuit Law
2- Kirchhoff's Voltage Law



شکل ۲. مدار الکتریکی

در حلقه ۱ $KVL: -V_1 + V_2 + V_3 = 0$

در حلقه ۲ $KVL: V_4 - V_5 - V_3 = 0$

در حلقه ۳ $KVL: -V_6 + V_1 + V_5 = 0$

الگوریتم پیشنهادی جهت یافتن مسئله کوتاه‌ترین مسیر

روش پیشنهادی در این مقاله علاوه بر یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت، قادر است تا با یک‌بارحل کردن مسئله در آن واحد به یافتن کوتاه‌ترین مسیر و نیز طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های جهت‌دار بپردازد، همچنین دارای مزیت‌های دیگری از جمله ذهنی و تجربی نبودن قاعده الگوریتم، داشتن اساس و پشتوانهٔ قوی قانون اهم و KVL، هم‌گرایی سریعتر به سمت مسیر بهینه (یعنی با انتخاب یکی از شاخه‌های منشعب شده از یک گره به عنوان شاخه‌ای در مسیر بهینه، دیگر شاخه‌های آن گره به عنوان مسیر غیر بهینه حذف می‌گردند)، زمان محاسبات کمتر به خصوص در شبکه‌هایی با تعداد گره‌های زیاد و پیچیده، آینده‌نگری و پیش‌بینی مسیر بهینه (کوتاه‌ترین یا طولانی‌ترین مسیر) می‌باشد. لازم به ذکر است که این الگوریتم در مواردی که اختلاف بین دو نمونه از کوتاه‌ترین مسیرها (در مسئله کوتاه‌ترین مسیر) و یا دو نمونه از طولانی‌ترین مسیرها (در مسئله طولانی‌ترین مسیر) چندان زیاد نباشد (طبق نتایج تجربی، تقریباً از ۲۰٪ مقدار کوتاه‌ترین مسیر یا طولانی‌ترین مسیر، بیشتر نباشد)، ممکن است به دلیل مشکلاتی که در معادل‌سازی مقاومت‌ها در طول مسیر به وجود می‌آید، قادر به ارائه جواب

بهینه (کوتاه‌ترین یا طولانی‌ترین مسیر) نباشد.

این الگوریتم برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر دارای گام‌هایی به شرح ذیل می باشد:

۱. ابتدا وزن هر شاخه در مسئله کوتاه‌ترین مسیر با یک مقاومت که مقدار اهم آن، برابر با وزن آن شاخه است، مدل می‌شود تا یک شبکه مقاومتی به دست آید.

۲. برای تحریک کردن این شبکه مقاومتی معادل، از منبع ولتاژ ثابتی که قطب مثبت آن به مبدا و قطب منفی آن به مقصد وصل شده استفاده می‌شود، بنابراین منبع ولتاژ به عنوان یک شاخه جدید به شبکه اضافه می‌شود. مقدار ولتاژ منبع دل‌خواه می‌باشد ولی برای کاهش تعداد رقم اعشار در محاسبه جریان شاخه‌ها بهتر است مقدار ولتاژ منبع، اختلاف زیادی با حداکثر مقدار مقاومت‌ها داشته باشد.

۳. با استفاده از قانون اهم و KVL، جریان درون حلقه‌ها با استفاده از روابط ماتریسی ساده‌تر به شرح ذیل محاسبه می‌شود:

الف ـ برای هر حلقه جریانی در جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود که تعداد حلقه‌ها در شبکه برابر است با: $L = b - n + 1$، و در آن b تعداد شاخه‌ها، n تعداد گره‌ها و L تعداد حلقه‌هایی است که شاخه‌ای در درون آن وجود ندارد (کوه و دسور، ۱۳۸۳).

ب ـ ابتدا روابط ماتریسی قانون اهم بدین صورت تشکیل می‌شود: $R_{L\times L}.I_{L\times 1} = V_{L\times 1}$

که در آن $I_{L\times 1} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$ ماتریس جریان حلقه، ماتریس $R_{L\times L}$، ماتریس مقاومتی حلقه و $V_{L\times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_L \end{bmatrix}$ ماتریس منبع ولتاژ حلقه می باشد [۱].

ماتریس مقاومتی حلقه، $R_{L\times L}$، یک ماتریس متقارن است که درایه‌های قطر اصلی آن برابر مجموع مقاومت‌های موجود در حلقه متناظر و درایه‌های غیر قطر اصلی برابر با منفی مقاومت مشترک بین حلقه‌های متناظر سطر و ستون ماتریس می‌باشد

]. ماتریس جریان حلقه، $I_{L\times 1}$، ماتریس مجهولات مسئله است که درایه سطر i ام
ن برابر جریان مجهول در حلقه i ام است. همچنین در ماتریس منبع ولتاژ حلقه،
V_{L}، درایه سطر i ام، برابر ولتاژ منبع در حلقه i ام می‌باشد. باید توجه داشت که در
ن مسئله به غیر از درایه‌ی مربوط به حلقه‌ای که منبع ولتاژ به آن وصل شده است،
بقی درایه‌های ماتریس $V_{L\times 1}$، صفر است زیرا حلقه‌های دیگر، بدون منبع ولتاژ
باشد.

ف ـ با استفاده از قاعده کرامر می‌توان ماتریس مجهولات $I_{L\times 1}$ را به‌دست آورد.

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \text{و} \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \text{و} \quad \ldots \quad \text{و} \quad i_L = \frac{\Delta_L}{\Delta}$$

ه در آن $\Delta = \det(R)$ و Δ_j دترمینان ماتریسی است که از جایگزینی ستون j ام
تریس $R_{L\times L}$ با سمت راست معادله (ماتریس $V_{L\times 1}$) به‌دست می‌آید [۱]

بعد از محاسبه جریان حلقه‌ها، ابتدا از شاخه‌های متصل به گره مبدا، شاخه‌ای که
رای بیشترین جریان است انتخاب شده و از طریق این شاخه، گره جدید بعدی به
ست می‌آید و روند انتخاب شاخه‌ها با بیشترین جریان به طور متوالی تا رسیدن به
ره مقصد ادامه دارد. در ضمن در گراف‌های بدون جهت از محاسبه جریان
اخه‌هایی که مسیر بهینه (کوتاه‌ترین مسیر) را به سمت گره‌های طی شده قبلی باز
گرداند، خودداری می‌شود. در این صورت مسیری با کمترین مقاومت که معادل
کوتاه‌ترین مسیر است به دست می‌آید.

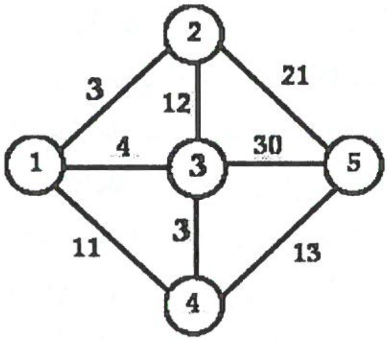
در خصوص محاسبه جریان شاخه‌ها بدین طریق عمل می‌شود که اگر شاخه‌ای
دو حلقه مشترک باشد (شاخه درونی) جریان هر دو حلقه از آن شاخه عبور
کند که خلاف جهت همدیگرند، بنابراین جریان عبوری از آن شاخه برابر تفاضل
ریان آن دو حلقه خواهد بود ولی جریان شاخه‌های غیرمشترک (بیرونی) مربوط به
حلقه، جریان همان حلقه می‌باشد.

باید توجه داشت که برای یافتن طولانی‌ترین مسیر (در گراف‌های جهت‌دار)
افی است فقط در گام چهارم، قدر مطلق کمترین جریان عبوری از شاخه‌ها را از
دا به مقصد دنبال کرده و از محاسبه جریان شاخه‌های جهت‌داری که در خلاف

جهت مسیر بهینه هستند، خودداری نمود. همچنین برای یافتن کوتاه‌ترین (طولانی‌ترین) مسیر بین دو گره دل‌خواه کافی است منبع ولتاژ را به مبدا و مقص دل‌خواه وصل کرده و گام‌های فوق را دنبال نمود.

سه مثال از مسائل کوتاه‌ترین و طولانی‌ترین مسیر و حل آن از طریق الگوریت پیشنهادی

مثال ۱: در گراف بدون جهت شکل ۳، کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ (مبدا) و گره (مقصد) از طریق الگوریتم پیشنهادی به شرح ذیل به دست می‌آید:

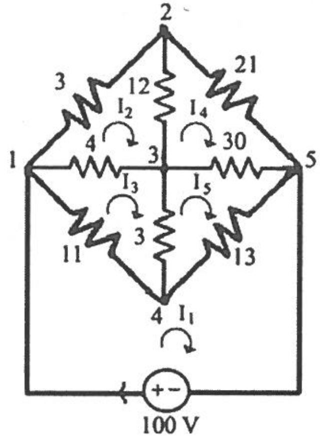


شکل ۳. مثالی برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر

گام ۱: معادل‌سازی مسئله کوتاه‌ترین مسیر با شبکه مقاومت؛

گام ۲: تحریک کردن شبکه مقاومتی با استفاده از منبع ولتاژ دلخواه (۱۰۰ ولت)؛

گام ۳: جریان مشخص شده در حلقه‌ها با استفاده از رابطه ماتریسی قانون اهم، $R_{L\times L}.I_{L\times 1} = V_{L\times 1}$، محاسبه می‌شود:



شکل ٤. مدار مقاومتی معادل شکل ۳

$$\begin{bmatrix} 11+13 & 0 & -11 & 0 & -13 \\ 0 & 3+12+4 & -4 & -12 & 0 \\ -11 & -4 & 4+3+11 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 12+21+30 & -30 \\ -13 & 0 & -3 & -30 & 30+13+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 0 & -11 & 0 & -13 \\ 0 & 19 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -4 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 63 & -30 \\ 0 & 0 & -3 & -30 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24 & 0 & -11 & 0 & -13 \\ 0 & 19 & -4 & -12 & 0 \\ -11 & -4 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 63 & -30 \\ -13 & 0 & -3 & -30 & 46 \end{vmatrix}} = 12.23$$

$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4.58$ و $I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 9.628$ و $I_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 4.09$ و $I_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = 6.75$

گام ٤: ابتدا جریان شاخه‌های متصل به گره مبدا بدین طریق محاسبه می‌شود:

شاخه غیرمشترک (بیرونی) ۱ و ۲ مربوط به حلقه ۲ است، بنابراین جریان عبوری ا
این شاخه همان جریان حلقه ۲ (I_2) می‌باشد. شاخه درونی ۱ و۳ در حلقه‌های ۲ و
مشترک است، بنابراین جریان عبوری از آن شاخه برابر تفاضل جریان آن دو حلق
($I_3 - I_2$) از گره ۱ به سمت گره ۳ می‌باشد. همچنین جریان عبوری از شاخ
مشترک (درونی) ۱ و ۴، برابر $I_1 - I_3$ می‌باشد.

شاخه ۱ و : $I_2 = 4.58$

شاخه ۱ و : $I_3 - I_2 = 5.048$

شاخه ۱ و : $I_1 - I_3 = 2.602$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود بیشترین جریان از شاخهٔ ۱ و ۳ می گذرد، بنابراین گر
بعدی، گره ۳ است و به محاسبهٔ جریان شاخه‌های متصل به گره ۳ پرداخته می‌شود :
(علامت منفی در این شاخه بیان‌گر حرکت در خلاف جهت مسیر است)

شاخه ۳ و : $I_4 - I_2 = -0.4$

شاخه ۳ و : $I_5 - I_4 = 2.66$

شاخه ۳ و : $I_3 - I_5 = 2.878$

از شاخه ۳ و ۴ بیشترین جریان می گذرد، بنابراین گره بعدی، گره ۴ است و ب
محاسبه جریان شاخه‌های متصل به گره ۴ پرداخته می‌شود (لازم به ذکر است ک
بدون محاسبه جریان شاخه‌های متصل به گره ۴، مشخص است که گره بعدی، گره
است، زیرا دیگر بازگشتی به گره‌های ۱ و ۳ وجود نخواهد داشت).

شاخه ۴ و : $I_3 - I_1 = -2.602$

شاخه ۴ و : $I_5 - I_3 = -2.878$

شاخه ۴ و : $I_1 - I_5 = 5.48$

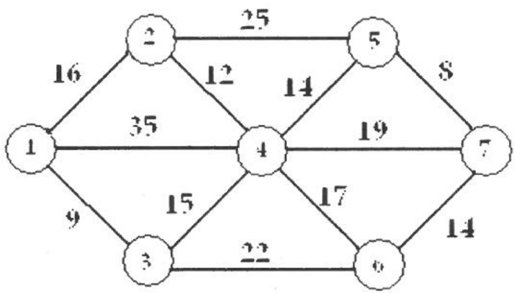
بیشترین جریان از شاخه ۴ و ۵ می گذرد، بنابراین گره بعدی، گره ۵ (مقصد) است.
بدین ترتیب جواب بهینه (کوتاه‌ترین مسیر) عبارتند از:

$\mathrm{Min} \sum R = 20$

$$1 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{13} 5$$

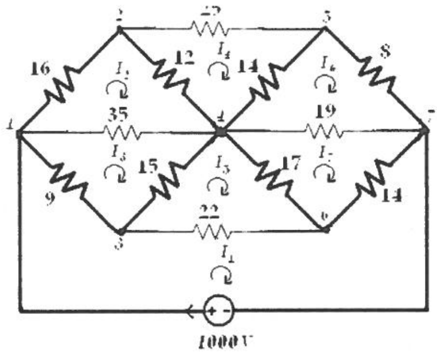
مثال ۲: کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ (مبدا) و گره ۷ (مقصد) در گراف بدون جهت

کل ۵، از طریق الگوریتم پیشنهادی بدین طریق محاسبه می‌شود:



شکل ۵. مثالی برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر

ام ۱ و ۲:



شکل ٦. مدار مقاومتی معادل شکل ۵

ام ۳:

$$\begin{bmatrix} 9+22+14 & 0 & -9 & 0 & -22 & 0 & -14 \\ 0 & 16+12+35 & -35 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -35 & 35+15+9 & 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 12+25+14 & 0 & -14 & 0 \\ -22 & 0 & -15 & 0 & 15+17+22 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 14+8+19 & -19 \\ -14 & 0 & 0 & 0 & -17 & -19 & 19+14+17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 76.09$ و $I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 26.89$ و $I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 42.58$ و $I_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 13.8$

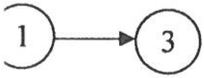
$I_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = 59.39$ و $I_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta} = 29.1$ و $I_7 = \frac{\Delta_7}{\Delta} = 52.5$

گام ۴:

شاخه ۱ و ۲ : $I_2 = 26.89$

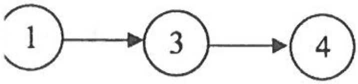
شاخه ۱ و ۴ : $I_3 - I_2 = 15.69$

شاخه ۱ و ۳ : $I_1 - I_3 = 33.51$ ⟵ (انتخاب می‌شود)



شاخه ۳ و ۴ : $I_5 - I_3 = 16.81$ ⟵ (انتخاب می‌شود)

شاخه ۳ و ۶ : $I_1 - I_5 = 16.7$



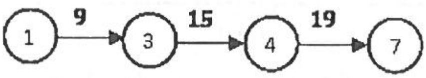
شاخه ۴ و د : $I_6 - I_4 = 15.3$

شاخه ۴ و ۷ : $I_7 - I_6 = 23.4$ ⟵ (انتخاب می‌شود)

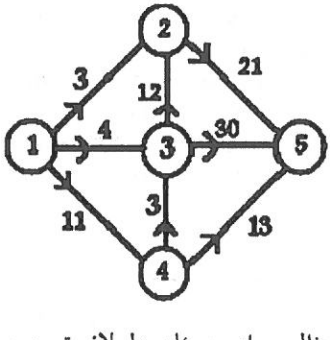
شاخه ۴ و ۶ : $I_5 - I_7 = 6.89$

بدین ترتیب جواب بهینه عبارت است از:

$\text{Min} \sum R = ٤٣$



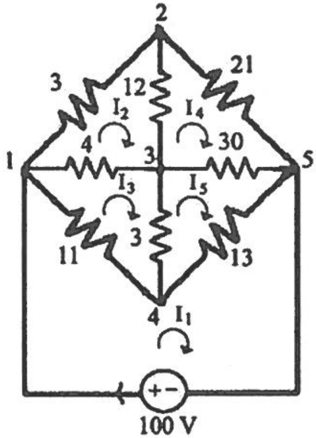
مثال ۳: طولانی‌ترین مسیر بین گره ۱ (مبدا) و گره ۵ (مقصد) در گراف جهت‌دار شکل ۷، از طریق الگوریتم پیشنهادی به شرح ذیل به دست می‌آید:



شکل ۷. مثالی برای مسئله طولانی‌ترین مسیر

در صورت تمایل به یافتن طولانی‌ترین مسیر در گراف شکل ۷ (گرافی مشابه با
اف شکل ۳ ولی از نوع جهت‌دار)، گام های ۱، ۲ و۳ مشابه با مثال ۱ عیناً تکرار
شود:

م ۱ و ۲:



شکل ۸. مدار مقاومتی معادل شکل۷

م ۳:

$$\begin{bmatrix} 11+13 & 0 & -11 & 0 & -13 \\ 0 & 3+12+4 & -4 & -12 & 0 \\ -11 & -4 & 4+3+11 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 12+21+30 & -30 \\ -13 & 0 & -3 & -30 & 30+13+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 0 & -11 & 0 & -13 \\ 0 & 19 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -4 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 63 & -30 \\ 0 & 0 & -3 & -30 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24 & 0 & -11 & 0 & -13 \\ 0 & 19 & -4 & -12 & 0 \\ -11 & -4 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 63 & -30 \\ -13 & 0 & -3 & -30 & 46 \end{vmatrix}} = 12.23$$

$I_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=4.58$ و $I_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=9.628$ و $I_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=4.09$ و $I_5=\frac{\Delta_5}{\Delta}=6.75$

گام ۴: در این گام، به جای انتخاب شاخه‌ها با بیشترین جریان عبوری، قدر مطل
کمترین جریان عبوری از شاخه‌ها از مبدا به مقصد به شرح ذیل دنبال می‌شود:

ابتدا قدر مطلق جریان شاخه‌های متصل به گره مبدا محاسبه می‌شود:

شاخه ۱ و : $|I_2| = 4.58$

شاخه ۱ و : $|I_3 - I_2| = 5.048$

شاخه ۱ و : $|I_1 - I_3| = 2.602$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود کمترین جریان از شاخهٔ ۱ و ۴ می‌گذرد، بنابرای
گره بعدی، گره ۴ است و به محاسبه قدر مطلق جریان شاخه‌های متصل به گره
پرداخته می‌شود:

شاخه ۴ و : $|I_5 - I_3| = 2.878$

شاخه ۴ و : $|I_1 - I_5| = 5.48$

از شاخه ۴ و ۳ کمترین جریان می‌گذرد، بنابراین گره بعدی، گره ۳ است و قد
مطلق جریان شاخه‌های متصل به گره ۳ محاسبه می‌شود (باید توجه داشت که نیاز
به محاسبه جریان شاخه‌های ۳ و ۴ و همچنین ۳ و ۱ نیست، زیرا جهت این شاخه
در خلاف جهت مسیر حرکت است).

شاخه ۳ و : $|I_4 - I_2| = 0.49$

شاخه ۳ و : $|I_5 - I_4| = 2.66$

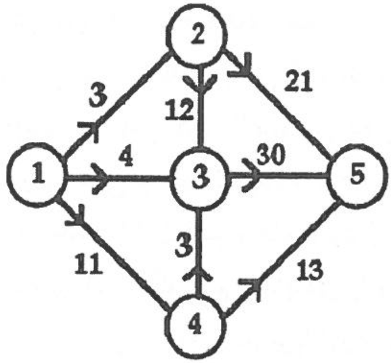
کمترین جریان از شاخه ۳ و ۲ می‌گذرد، بنابراین گره بعدی، گره ۲ می‌باشد. در گر
۲، بدون محاسبه جریان شاخه‌های متصل به آن، مشخص است که گره بعدی، گره
(مقصد) می‌باشد (زیرا دیگر نمی‌توان به گره‌های ۱ و ۳ بازگشت).

بدین ترتیب جواب بهینه (طولانی‌ترین مسیر) عبارتست از:

$\text{Max} \sum R = \mathbf{47}$

$$1 \xrightarrow{11} 4 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{12} 2 \xrightarrow{21} 5$$

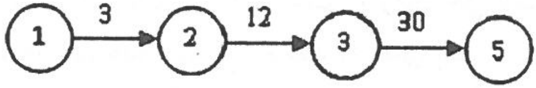
حال فرض کنید در این مثال (طولانی‌ترین مسیر) جهت شاخه ۲ و ۳ طبق گراف شکل ۹ تغییر کند:



شکل ۹. مثالی برای مسئله طولانی‌ترین مسیر که در آن جهت شاخه ۲و۳ تغییر کرده است

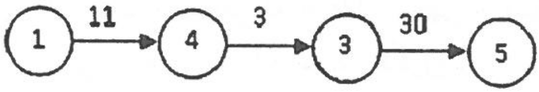
جواب بهینه (طولانی‌ترین مسیر) عبارتست از:

Max $\sum R = 45$



ولی جواب بهینه (طولانی‌ترین مسیر) از طریق الگوریتم پیشنهادی برابر است با:

Max $\sum R = 44$



همان‌طور که قبلاً اشاره شده بود، به دلیل اینکه اختلاف بین دو نوع باشند از طولانی‌ترین مسیرها ($45- 44=1$) در این گراف، از ۲۰٪ طولانی‌ترین مسیر ($0.2\times45= 9$) کمتر است، الگوریتم پیشنهادی قادر به ارائه جواب بهینه (طولانی‌ترین مسیر) نمی‌باشد.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله سعی شد تا دو حوزه علمی مجزای الکترونیک و تحقیق در عملیات به هم پیوند داده شوند و ایده‌ای نوین برای ورود سایر رشته‌ها به حوزه تحقیق در

عملیات و پیشرفت آن باشد. هدف از این مقاله ارائه الگوریتمی جهت یافتن جواب بهینه برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از قوانین و شبکه‌های الکتریکی بود که علاوه بر یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف های جهت دار و بدون جهت، می‌توان با یک‌بارحل کردن مسئله در زمان واحد به یافتن کوتاه‌ترین مسیر و نیز طولانی ترین مسیر در گراف های جهت دار اقدام کرد. قاعده این الگوریتم مانند روش دیجسترا (نشانه گذاری) بر پایه روش سعی و خطا نمی‌باشد بلکه بر اساس معادلات و قوانین اثبات شده الکترونیک از جمله قانون اهم و قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) است. همچنین از جمله تفاوت‌های این الگوریتم پیشنهادی با روش برنامه‌ریزی پویا این است که این الگوریتم مانند روش برنامه‌ریزی پویا نیازی به قسمت کردن مسئله به چندین بخش و نیز ارتباط بخش‌ها با بخش‌های قبلی ندارد و با یک بار حل الگوریتم، جواب حاصل می گردد.

نقطه ضعف جدی روش کوتاه‌ترین مسیر بر اساس برنامه‌ریزی عدد صحیح، بالاتر بودن زمان حل آن نسبت به زمان حل الگوریتم پیشنهادی است. همچنین برنامه‌ریزی عدد صحیح، حافظه رایانه‌ای بیشتری نیز می‌طلبد و به این جهت حل مسائل با ابعاد بزرگ، سخت یا غیرممکن می گردد، به طوری که زمان حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح با افزایش تعداد متغیرها به طور نمایی افزایش می‌یابد. این در حالی است که با حل تعداد قابل توجهی از مسائل کوتاه‌ترین مسیر به خصوص در مسائلی با ابعاد بزرگ توسط الگوریتم پیشنهادی، مشخص گردید که این الگوریتم دارای زمان محاسبات کمتری نسبت به روش‌های مرسوم است و برای مقایسه دقیق زمان محاسبات این روش‌ها با الگوریتم پیشنهادی لازم است مثال‌های متنوع دیگری شبیه‌سازی شود.

الگوریتم پیشنهاد شده در این مقاله می‌تواند در مواردی که تفاضل بین دو نمونه از کوتاه‌ترین مسیرها (در مسئله کوتاه‌ترین مسیر) چندان کم نباشد به جواب بهینه دست یابد مانند مثال ۱. حتی در مواردی که این تفاضل کم باشد نیز ممکن است جواب بهینه حاصل شود مانند مثال ۲. ولی در مثال ۳ (طولانی‌ترین مسیر) با تغییر جهت در یکی از شاخه‌ها از محاسبه طولانی‌ترین مسیر باز ماند، زیرا اختلاف بین دو

نمونه از طولانی‌ترین مسیرها خیلی کم بود. بنابراین با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان گفت که الگوریتم پیشنهادی در حوزه روش‌های فرا ابتکاری قرار می‌گیرد و تحت فرض مذکور (یعنی اختلاف بین دو تا از کوتاه‌ترین مسیرها، در مسئله کوتاه‌ترین مسیر و یا دو تا از طولانی‌ترین مسیرها، در مسئله طولانی‌ترین مسیر، تقریباً از ۲۰٪ مقدار کوتاه‌ترین مسیر یا طولانی‌ترین مسیر، بیشتر نباشد) جواب بهینه حاصل می‌گردد.

با توجه به مثال‌های متعددی که با روش الگوریتم پیشنهادی حل گردید، نتایج فوق به‌دست آمد. در پایان پیشنهاد می‌شود، با مطالعات جامع‌تر و تخصصی‌تر، این الگوریتم به حل تمام مسائل کوتاه‌ترین مسیر و طولانی‌ترین مسیر توسعه داده شود.

منابع و مآخذ

۱. تیلور، برنارد دبلیو. **"مدیریت کمی"**، ترجمه: علی خاتمی فیروزآبادی و حمید ضرغام، انتشارات دانشگاه علامه طباطبایی، چاپ اول، تهران، ۱۳۸۳.

۲. کوه، ارنست و دسور، چارلز. **"نظریه اساسی مدارها و شبکه ها"**، ترجمه و تکمیل: پرویز جبه دار مارالانی، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ هشتم، تهران، ۱۳۸۳.

۳. مهرگان، محمدرضا. **"پژوهش عملیاتی (برنامه‌ریزی خطی و کاربردهای آن)"**، انتشارات کتاب دانشگاهی، چاپ بیست و دوم، تهران، ۱۳۸۴.

۴. هیت، ویلیام، کمرلی، جک و دوربن، استیون. **"تحلیل مهندسی مدار"**، ترجمه: قدرت الله سپیدنام، انتشارات علوم رایانه، چاپ اول، تهران، ۱۳۸۲.

5. Bazzarra, M. S., and Jarvis J. "**Linear Programming and Network Flow**", John Wiley & sons, New Jersey, 1990.

6. Chuang, T. N., and Kung, J. S. "**A new algorithms for discrete fuzzy shortest path problems in a network**" Applied Mathematics and Computation, Vol. 174, 2006.

7. Dorf, R.C., and Svoboda, J.A. "**Introduction to Electric Circuits**", 4th edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 1999.

8. Douglas ,B. W. "**Introduction to Graph Theory**", Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2001.

9. Hamacher, H. W., Ruzika S., and Tjandra S. A. "**Algorithms for time-dependent bicriteria shortest path problems**" Discrete Optimization, Vol. 3, 2006.

10. Hernandes, F., Lamata, M. T., Verdegay, J. L., and Yamakami, A. "**The shortest path problem on networks with fuzzy parameters** " Fuzzy Sets & Systems, Vol. 158, 2007.

11. Hiller, G., and Liberman, B. "**Introduction to Operations Research**". McGraw-Hill, New York, 2005.

12. Ji, X., Iwamura, K., and Shao Z. "**New models for shortest path problem with fuzzy arc lengths**" Applied Mathematical Modelling, Vol. 31, 2007.

13. Lawler, E. I. "**Combinatorial Optimization: Networks and Matroids**", Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

14. Mohemmed, A. W., Sahoo, N. C., and Geok, T. K. "**Solving shortest path problem using particle swarm optimization**" Applied Soft Computing, Vol. 8, 2008.

15. Montemanni, R., and Gambardella, L. "**An exact algorithm for the robust shortest path problem with interval data**", Computers and Operations Research, Vol. 10, 2004.

16. Nie, Y., and Wu, X. "**Shortest path problem considering on-time arrival probability**" Transportation Research, Vol. 43, 2009.

17. Perny, P., and Spanjaard, O. "**A preference-based approach to spanning trees and shortest paths problems**" European Journal of Operational Research, Vol. 162, 2005.

18. Steenstrup, M. "**Routing in Communications Network**", Prentice-Hall,

New Jersey, 1995.
19. Villeneuve, D., and Desaulniers, G. "**The shortest path problem with forbidden paths**" European Journal of Operational Research, Vol. 165, 2005.
20. Wang X., and Qu. H. "**A modified pulse coupled neural network for shortest-path problem**" Neurocomputing, Vol. 72, 2009.
21. Zamirian, M., Farahi, M. H., Nazemi, A. R. "**An applicable method for solving the shortest path problems**" Applied Mathematics and Computation, Vol. 190, 2007.