

## اندازه‌گیری عملکرد سبد سهام با استفاده از شاخص ریسک آومان-سرانو: مطالعه موردی شرکت‌های منتخب فعال در بورس اوراق بهادار تهران

رضا طالبلو<sup>۱</sup>

مولود رحمانیانی<sup>۲</sup>

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۰/۲۰

تاریخ ارسال: ۱۳۹۲/۰۲/۳۰

### چکیده

وضعیت ریسکی، وضعیتی تعریف می‌شود که در عین نامعلوم بودن و غیرقطعی بودن پیامدهای آینده جهان، یافتن احتمال‌های مربوط به وقوع این پیامدها امکانپذیر است. در اقتصاد مالی معمولاً از توزیع نرمال برای نشان دادن احتمال وقوع پیامدها به خصوص در رابطه با بازده دارایی‌ها استفاده می‌شود اما در بیشتر موارد، احتمال برآوردی بازدهی‌های دارایی‌ها، توزیع نرمال ندارد و دارای دم‌های پهن‌تر و کشیده‌تر از توزیع نرمال هستند. با این توصیف استفاده از واریانس به عنوان اندازه ریسک و تمامی شاخص‌های مبتنی بر واریانس اعتبار خود را از دست می‌دهند. در پی تلاش برای رفع این محدودیت‌ها، معیارهای ریسک مختلفی معرفی شد. یکی از مهم‌ترین معیارهای مورد استفاده در سال‌های اخیر اندازه ریسک آومان-سرانو (۲۰۰۸) است. در پژوهش حاضر، شاخص ریسکی بودن آومان-سرانو برای بررسی عملکرد اقتصادی منتخبی از شرکت‌های فعال در بورس اوراق بهادار تهران محاسبه شده است. بعد از محاسبه این شاخص برای ۲۳ شرکت منتخب از صنایع مختلف، اقدام به تشکیل سبد بهینه بر اساس این اندازه ریسک شد. در گام بعد برای مقایسه عملکرد این شاخص در اندازه‌گیری ریسک و ساختن سبد بهینه از سه ملاک مختلف شامل: ۱- سید سازی با وزن‌های برابر، ۲- سیدسازی بر اساس نسبت شارپ و ۳- سیدسازی بر اساس اندازه عملکرد اقتصادی (مبتنی بر اندازه ریسکی بودن آومان-سرانو) نشان داده شد که استفاده از شاخص اندازه عملکرد اقتصادی با  $EPM$  عملکرد بهتری در سیدسازی دارد به طوری که بنابر نتایج این پژوهش سبد بر اساس شاخص عملکرد اقتصادی با بازدهی سالانه ۵۰/۶ درصد عملکرد بهتری نسبت به سبد با وزن برابر و سبد بر اساس شاخص شارپ داشت.

**واژگان کلیدی:** ریسک، اندازه ریسک، اندازه منسجم ریسک، شاخص ریسکی بودن

آومان-سرانو، شاخص عملکرد اقتصادی

طبقه‌بندی JEL: G110, G320

۱- استادیار، دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی، گروه اقتصاد نظری- نویسنده مسئول

talebloo.r@gmail.com

۲- دانشجوی دکتری دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی

Moloud.rahmaniani@gmail.com

## ۱- مقدمه

میان ریسک و نااطمینانی تفاوت وجود دارد. نااطمینانی به وضعیتی اشاره دارد که در آن امکان نسبت دادن توزیع‌های احتمال به نتایج ممکن وجود ندارد و ریسک وضعیتی است که در آن هم تعریف وضعیت‌های آینده جهان و هم احتمال‌های مربوط به وقوع آنها امکانپذیر است. تصمیم‌گیری در خصوص یک موقعیت ریسکی به دو عامل میزان ریسکی بودن پیامد و شرایط تصمیم‌گیرنده بستگی دارد (دیاموند، استیگلیتز ۱۹۷۴). تحقیق پیش رو اندازه‌گیری ریسکی بودن یک موقعیت را مورد بررسی قرار می‌دهد به طوری که در آن ریسکی بودن یک موقعیت فقط به پیامدها و توزیع احتمال آنها بستگی دارد.

در اقتصاد مالی معمولاً یکی از مهم‌ترین کارها انتخاب سبد دارایی است و در این راستا باید ریسک هر دارایی اندازه‌گیری شود و برای این منظور باید توزیع احتمالی برای بازدهی‌های دارایی تعیین شود. متأسفانه توزیع احتمالی که به طور متعارف در نظریه مالی استفاده می‌شود، توزیع نرمال است. از آنجا که توزیع نرمال می‌تواند بر حسب دو پارامتر میانگین و واریانس توصیف شود، روابط ریسک-بازدهی سبد دارایی‌ها را نیز می‌توان با استفاده از همین دو پارامتر توصیف کرد.

اگرچه فرض می‌شود ریسک و بازدهی سبد دارایی قابل الگوسازی است، مناسب بودن این فرض به لحاظ تجربی بررسی شده است و نواقص آن آشکار شده است. در بیشتر موارد، بازدهی‌های برآوردی، توزیع نرمال ندارد و دارای دم‌های پهن‌تر (یعنی دم پهن) و کشیده‌تر از توزیع نرمال هستند. علاوه بر این، توزیع‌های تجربی شامل مقادیر تحقق یافته‌ای در انتهای توزیع هستند که احتمال وقوع آنها حتی خیلی بیشتر از توزیع‌های دم پهن<sup>۱</sup> است. بنابراین استفاده از واریانس به عنوان اندازه و معیار ریسک تمامی جنبه‌های ریسک را نمی‌تواند اندازه‌گیری کند و تمامی شاخص‌های مبتنی بر واریانس نیز اعتبار خود را از دست می‌دهند. در نتیجه باید به دنبال اندازه ریسک جدیدی باشیم که از آن در تحقیقات و ارزیابی‌های عملی در اقتصاد بتوان استفاده کرد.<sup>۲</sup>

1- Heavy – Tailed Distributions

2- Fabozzi, Neave, Shuo (2012)

در پی تلاش برای رفع این محدودیت‌ها، رتبه‌بندی‌های تسلطی مطرح شدند. رتبه‌بندی‌های تسلطی، رتبه‌بندی جزئی هستند که هر یک تنها قادر به رتبه‌بندی زیرمجموعه‌ای از تمامی انتخاب‌های ممکن هستند از این رو باید به دنبال یک معیار کلی تر بود.

یکی دیگر از این تلاش‌ها، معرفی مفهوم اندازه‌های منسجم است این مفهوم نیز در تلاش برای اصلاح نواقص معیارهای ریسک و به خصوص برای رفع مشکلات مربوط به معیار ارزش در معرض خطر (*VAR*) مطرح شد.

ارتزرنر، دل‌باين، ایبر و هیس (۱۹۹۹)<sup>۱</sup> اندازه‌های منسجم ریسک را به‌عنوان اندازه‌ای تعریف می‌کنند که بر اساس چهار اصل موضوعه است<sup>۲</sup>، اما لزوماً از این اندازه ریسک نمی‌توان یک اندازه منحصر به فرد برای هر لاتاری استخراج کرد.

آومان و سرانو (۲۰۰۸) معیار (اندازه) اقتصادی ریسکی بودن را ارائه کردند. معیار ریسکی بودن آومان-سرانو<sup>۳</sup> با دو اصل موضوعه به طور منحصر به فرد تعریف می‌شود. در عین حال با معیارهای ارو-پرات برای ریسک‌گریزی موضعی مرتبط است و این موضوع به تنهایی نشان‌دهنده عمق ایده اقتصادی در طراحی این اندازه ریسک است.

روند پژوهش‌های سال‌های اخیر حاکی از مقبولیت هر چه بیشتر این اندازه‌ها در موضوعات اندازه‌گیری ریسک است به همین جهت در این مقاله سعی شده است ضمن معرفی، این اندازه ریسک را برای برخی از شرکت‌های بورسی ایران بکار برده شود.

ترتیب مطالب به این صورت است؛ در بخش دوم ابتدا پژوهش‌ها در مورد ریسک و اندازه ریسک ارائه می‌شود و جایگاه شاخص آومان-سرانو در پژوهش‌های اخیر و گسترش‌های صورت گرفته در آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم انواع اندازه‌های ریسک مطرح می‌شود و در نهایت در بخش چهارم اندازه ریسک آومان-سرانو با توجه به داشتن رویکرد اقتصادی به ریسک برای پژوهش‌های اقتصادی و مالی تشریح

۱- از این پس در مقاله با اختصار (ADEH) نمایش داده می‌شود.

2- Artzner, P, F Delbaen, Eber, and Heath

3- Aumann and Serrano

شده و در نهایت این اندازه برای شرکت‌های منتخب در بورس اوراق بهادار تهران بکار برده شده است.

## ۲- ادبیات ریسک

### ۲-۱- پژوهش‌ها در مورد ریسک و اندازه ریسک

تاکنون پژوهش‌های بسیاری به مقوله ریسک و معیاری برای اندازه‌گیری ریسک پرداخته‌اند. برای مفهوم‌سازی و کمی‌سازی ریسک، دو موج مطالعاتی قابل شناسایی است؛ موج اول که در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ میلادی شکل گرفت و موضوعات مختلفی همچون ریسک‌گریزی، رتبه‌بندی تصادفی و بررسی ویژگی‌های عملیاتی، معیارهای مطرح شده در آن موج بود. موج دوم به دهه اول قرن حاضر میلادی و به طور خاص به سال‌های ۲۰۰۷ تاکنون مربوط می‌شود که سعی شده است از یک سو، معیار کلی‌تری از ریسک استخراج شود که به ازای تمامی توزیع‌ها به نتایج سازگاری منجر شود و از سوی دیگر برآمده از الگوهای اقتصادی باشد به نحوی که نگرش افراد نسبت به ریسک (میزان ریسک‌گریز بودن آنها) نیز در این معیارها لحاظ شده باشد.

در سال‌های پیش از دهه ۱۹۷۰ میلادی، دو گروه در زمینه ریسک به مطالعه پرداختند؛ یک گروه افرادی همچون فرانک نایت، ارو و دبرو، ون نیومان و مورگنسترن بودند که به مفهوم‌سازی و تاثیر شرایط ریسکی بر انتخاب عاملان اقتصادی و تاثیر آن تخصیص بهینه در اقتصاد می‌پرداختند و گروه دیگر همچون مارکوویتز، شارپ، لنتنر، توپین که از ملاک‌های کمی ریسک در عمل استفاده می‌کردند.

نایت (۱۹۲۱) به تفاوت بین ریسک و عدم اطمینان پرداخت. ارو و دبرو به تاثیر ریسک در تخصیص بهینه اقتصاد پرداختند. ون نیومان و مورگنسترن، تصمیم‌گیری عاملان اقتصادی تحت ریسک را مورد بررسی قرار دادند. روئچایلد و استیگلیتز (۱۹۶۹) استیگلیتز و دیاموند<sup>۱</sup> (۱۹۷۴) هادار و راسل<sup>۲</sup> (۱۹۶۹) به موضوع تسلط تصادفی پرداختند.

1- Stiglitz and Diamond

2- Hadar, J, and Russell. Wi

طی سه دهه اخیر رویکردهای جامع‌تری نسبت به موضوع ریسک و اندازه‌گیری آن مطرح شده است. در دهه ۹۰ رویکرد اندازه در معرض ریسک به واسطه کارهای موسسه جی پی مورگان معرفی شد و محققان بسیاری بر کارهای دانشگاهی در این حوزه متمرکز شدند به طوری که در مطالعات بسیاری به اندازه ریسک ارزش در معرض خطر پرداخته شده است و به تازگی نیز شاخص‌هایی مطرح شده‌اند که شکل تکامل یافته‌تر ارزش در معرض خطر هستند (راکفلر، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۶).

ارتزرنر، دل‌باین، ایبر و هیس (۱۹۹۹) اندازه‌های منسجم ریسک را بر اساس چهار اصل موضوعه تعریف کردند. ماچینا و روئچایلند (۲۰۰۸) یک جمع‌بندی از معیارهای ریسک و تلقی نسبت به مفهوم ریسک تا قبل از ۲۰۰۷ را ارائه کرده‌اند، اما در این میان ملاک‌هایی در ۱۰ گذشته معرفی شدند که جنبه کاربردی بسیاری داشتند. آومان و سرانو اندازه اقتصادی ریسک را مطرح کردند و شاخص ارائه شده را با دیگر اندازه‌های ریسک مانند پراکندگی (مارکویتز، ۱۹۵۲) نسبت شارپ (شارپ، ۱۹۶۶) اندازه در معرض ریسک (پیرسون، ۲۰۰۲) و اندازه ریسک منسجم<sup>۱</sup> (آرتزرنر و همکاران، ۱۹۹۹) مقایسه کردند.

فاستر - هارت (۲۰۰۹) تلاش کردند تا مفهوم عملیاتی برای شاخص اقتصادی آومان - سرانو ارائه کنند که منجر به ارائه شاخص دیگری شد که عدم ورشکستگی را تضمین می‌کند. بالی و همکاران (۲۰۱۱) شاخص آومان - سرانو را توسعه داد و با استفاده از اطلاعات بازار اختیارات، مفید بودن آن را در تخصیص دارایی‌ها نشان دادند. آنها نشان می‌دهند که اندازه‌های نوینی همچون اندازه ریسکی بودن آومان - سرانو در مقایسه با اندازه ارزش در معرض ریسک، عملکرد بهتری دارد.

هوم و پیگورج (۲۰۱۲) نشان دادند که معیار اقتصادی آومان - سرانو برای پیشامدهای نامحدود نیز وجود دارد. آنها در تحقیقی دیگر معیاری برای اندازه‌گیری عملکرد اقتصادی (EPM) به جای نسبت شارپ معرفی کردند که در آن بجای واریانس از

معیار اقتصادی ریسک آومان-سرانو استفاده کردند. در حالت نرمال بودن بازدهی دو شاخص رتبه‌بندی یکسانی را در اختیار می‌گذارند.

شتریر (۲۰۱۳) شاخص ریسکی بودن آومان-سرانو را برای موقعیت‌های ریسکی نسبی مانند سهام تعدیل کرد. لی (۲۰۱۴) شاخص آومان-سرانو را برای چند لاتاری هم‌زمان مورد بررسی قرار داد و نشان داد که در صورت همبستگی مثبت ریسک مجموع دو شاخص ریسک بیشتر از مینیمم دو لاتاری بوده و برای همبستگی منفی مجموع همواره کمتر از حداکثر دو شاخص ریسک است. شولتز (۲۰۱۴) شاخص آومان-سرانو را بدون لحاظ کردن اصل همگنی توسعه داد و شاخص آومان-سرانو را برای افراد ریسک-خنثی و افراد ریسک‌پذیر محاسبه کرد.

فاستر-هارت شاخص خود را برای توزیع‌های گسسته ارائه کردند و رایدل و هلمن (۲۰۱۳) نشان دادند که شاخص فوستر-هارت برای بسیاری از توزیع‌های پیوسته (حتی با توزیع ساده یکنواخت) دارای جواب نیست و با تعریف حداکثر ضرر در صورت عدم وجود جواب برای معادله آومان-سرانو به عنوان شاخص ریسک، تعریف گسترده‌تری از شاخص ریسک ارائه کردند که توزیع‌های پیوسته را دربر می‌گیرد و همواره دارای جواب منحصر به فرد است. رستا و مارینا (۲۰۱۵) اندازه ریسکی بودن آومان-سرانو را با توجه به دو اصل همگنی و دوگانگی تعمیم دادند.<sup>۱</sup>

مطالعات در ایران در زمینه ریسک، بیشتر حول میانگین و واریانس و ارزش در معرض خطر بوده است که می‌توان به مقاله پژوهشگرانی همچون سجاد و هدایتی (۱۳۹۳) و رهنمای رودپشتی و میرغفاری (۱۳۹۰) اشاره کرد. پژوهشگرانی همچون اسلامی بیدگلی، راعی و کمال‌زاده (۱۳۹۱) و کشاورز حداد و صمدی به روش‌های مختلف اندازه‌گیری ریسک پرداخته‌اند.

۱- با مطالعه پژوهش‌های اخیر به نظر می‌رسد در سال‌های آینده معیارهای مبتنی بر میانگین و واریانس جای خود را به معیارهای جدیدی از نوع شاخص آومان-سرانو خواهند داد به طوری که حتی بهینه‌سازی سبب‌دارایی‌ها و یا تخمین ارزش در معرض خطر برای موسسات مالی نیز بر اساس این شاخص‌ها و اندازه‌های ریسک تعریف خواهد شد.

جدول الف - پژوهش‌های داخلی

پژوهشگران	روش و متغیر	نتایج
فریدون رهنمای رودپشتی و سیدرضا میرغفاری (۱۳۹۰)	ارزیابی عملکرد پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران: کاربرد ارزش در معرض خطر	شاخص شارپ تجدیدنظر شده ( <i>R-Sharpe</i> ) مبتنی بر ارزش در معرض خطر بکار گرفته شده است.
رسول سجادی، شراره هدایتی و شهره هدایتی (بهار ۱۳۹۳)	مقایسه مدل تلاطم تصادفی و مدل‌های <i>GARCH</i> از طریق محاسبه ارزش در معرض خطر، آزمون‌های نسبت شکست‌های کوپیک، کریستوفرسن و تابع زیان لویز را بکار برده شده است.	محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از روش‌های استی لزوماً به نتایج مناسبی نمی انجامد و در برخی از موارد استفاده از نظریه ارزش آفرین و در نظر گرفتن نوسانات شرطی برای داده‌ها موجب نتایج بهتری می‌شود.
فرشاد هیبتی، مهدی تقوی و سیدرضا موسوی (بهار ۱۳۹۳)	داده‌های ۱۰ساله بازدهی شاخص قیمت و بازدهی نقدی - دو بخش پرتفوی‌های رفتاری پیشنهادی مبتنی بر شاخص انحراف معیار و نیم انحراف معیار تشکیل و محاسبه بازدهی و ریسک برای ۸۱ پرتفوی پیشنهادی برای دوره سه ساله آتی.	ریسک پرتفوی رفتاری با استفاده از شاخص نیم انحراف معیار به طور معنادار کمتر از پرتفوی‌های کلاسیک بوده است. بازدهی و ریسک پرتفوی‌های رفتاری بر اساس هر دو شاخص انحراف معیار و نیم انحراف معیار تفاوت معنادار نداشته‌اند.
حمید کردبچه، محمدجواد حضوری و علی مالمیر (تابستان ۱۳۹۱)	یک روش چند بعدی مرزی را که بر مبنای روش تحلیل چند جهتی داده‌ها تعریف شده است برای ارزیابی رابطه ریسک و بازده در صنعت صندوق‌های مشترک معرفی و بکار برده‌اند.	صندوق‌های مشترک به طور متوسط تنها با ۶۶ درصد از ریسک نامطلوب و ۶۴ درصد از ریسک سیستماتیک تقبل شده در سال ۱۳۸۹ و هزینه کمتر می‌توانند به همان سطح از بازده کسب شده دست یابند.

ادامه جدول الف-

نتایج	روش و متغیر	پژوهشگران
فرآیند تصحیح تورش توانایی برآورد $Var$ مدل $GARCH$ نرمال را در برآورد $Var$ برای شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران ( $TEPIX$ )، حداقل در سطوح احتمال نهایی بهبود داده است و همچنین منجر به بهبود نتایج مدل $GARCH-t$ شده است.	رابطه بین برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از روش باز نمونه‌گیری بوت استرپ	رسول سجاد و مهسا گرجی (بهار ۱۳۹۱)
در شرکت‌هایی که پرتفوی متنوعی دارند (شرکت‌های سرمایه‌گذاری) استفاده از شاخص شارپ یا شارپ تجدیدنظر شده، تفاوت معناداری در رتبه بندی شرکت‌ها ایجاد نمی‌کند. در مورد شرکت‌هایی که پرتفوی ندارند و یا پرتفوی متنوعی ندارند این تفاوت از نظر آماری معنادار نیست.	آزمون روش شارپ تجدیدنظر شده مبتنی بر ارزش در معرض خطر جهت ارزیابی عملکرد	سیدرضا میرغفاری (زمستان ۱۳۹۱)

### ۳- استفاده از انواع اندازه‌های ریسک

یک اندازه ریسک تابعی است که با  $\rho$  نشان داده می‌شود و نگاهی از مجموعه

لاتاری‌های  $X$  به مجموعه اعداد حقیقی  $R$  است:  $\rho: X \rightarrow R$

تابع  $\rho$  طوری تعریف می‌شود که برد آن مثبت باشد. در اقتصاد مالی معمولاً یکی از مهم‌ترین کارها انتخاب سبد دارایی است و در این راستا باید توزیع احتمالی برای بازدهی‌های دارایی تعیین شود. توزیع احتمالی که به طور متعارف در نظریه مالی استفاده می‌شود، توزیع نرمال است. از آنجا که توزیع نرمال برحسب دو پارامتر میانگین و واریانس توصیف می‌شود، روابط ریسک-بازدهی سبد دارایی‌ها را نیز می‌توان با استفاده از همین دو پارامتر توصیف کرد.



### ۳-۱- اندازه‌های مبتنی بر دو گشتار اول

در اقتصاد مالی به‌طور مرسوم بر استفاده از میانگین و واریانس، توزیع‌های احتمال به‌عنوان اندازه‌های توصیفی ریسک تمرکز شده است تا حدی به این دلیل که هنگامی که تابع مطلوبیت مقعر است، هر دو این اندازه‌ها ماهیت حداکثرسازی مطلوبیت انتظاری را در خود دارند. با چنین فرضی و نیز فرض اینکه یک سرمایه‌گذار ریسک‌گریز با لاتاری  $X$  با دو نتیجه (لاتاری دو وضعیتی)<sup>۱</sup> مواجه باشد و احتمال  $۰/۵$  نتیجه پیشامد  $w - a$  و با احتمال  $۰/۵$  نتیجه پیشامد  $w + a$  باشد<sup>۲</sup> در این صورت،  $E(X) = w$  و  $\sigma^2(X) = a^2$  است که در آن  $\sigma^2(X)$  واریانس نتایج لاتاری دو وضعیتی بالا است. اگر  $a$  افزایش یابد، در حالی که ارزش انتظاری لاتاری ثابت باقی بماند به‌سادگی می‌توان نشان داد که ارزش معادل اطمینان  $X$  برای هر تصمیم‌گیر ریسک‌گریز کاهش خواهد یافت، یعنی در میان لاتاری‌های دو وضعیتی متقارن که مقادیر انتظاری مساوی، اما واریانس‌های متفاوتی دارند، فرد ریسک‌گریزتر ترجیح می‌دهد لاتاری با کمترین واریانس را انتخاب کند.<sup>۳</sup>

بنابراین حداقل برای این نوع خاص از لاتاری‌ها<sup>۴</sup> می‌توان گفت با افزایش واریانس (ثابت نگاه داشتن مقدار انتظاری)، مطلوبیت انتظاری کاهش می‌یابد و با افزایش  $E(X)$  (ثابت نگاه داشتن واریانس) مطلوبیت انتظاری افزایش می‌یابد. پرداختی انتظاری، معیاری از ثروت انتظاری آتی است و واریانس پرداختی، معیاری از پراکندگی ثروت است. علاوه بر این، در این موارد می‌توان از واریانس  $\sigma^2(X)$  یا

#### 1- Two Point Lottery

در اقتصاد و ریاضیات مالی تمامی وضعیت‌های ریسکی را در مفاهیمی همچون لاتاری خلاصه می‌کنند، از این رو هر جا که واژه «لاتاری» به میان آمد به صورت ضمنی بررسی و ارزیابی یک دارایی ریسکی است.

#### 2- Fabozzi, Neave, and Zhuo (2012)

۳- بعضی از تحلیلگران ترجیح می‌دهند از معیار نیم‌واریانس که تنها ریسک‌های کاهش ارزش را در نظر می‌گیرند، استفاده کنند. در محاسبه نیم‌واریانس تنها از انحرافات مربوط به کاهش در نظر گرفته می‌شود.  
۴- لاتاری‌های پیچیده‌تر را می‌توان به‌عنوان ترکیبی از لاتاری‌های دو وضعیتی در نظر گرفت.

انحراف معیار  $\sigma(X)$  به عنوان معیارهای ریسک استفاده کرد چراکه هر دو آنها پراکندگی لاتاری را توصیف می‌کنند.<sup>۱</sup>

مارکوویتز پیشنهاد کرد که تعیین صرف ریسک با استفاده از واریانس بازدهی کل یک سبد، معیار دقیق‌تری از ریسک است.<sup>۲</sup> وی معتقد است که برای بررسی اثرات متنوع‌سازی بر واریانس بازدهی سبد دارایی می‌توان از کوواریانس میان هر جفت از سرمایه‌گذاری‌های انفرادی (یعنی ضرایب همبستگی خطی) استفاده کرد و توضیح داد که متنوع‌سازی ویژگی جواب حاصل از محاسبه واریانس بازدهی سبد دارایی است. در این موارد  $\rho(r_X) \equiv \sigma^2(r_X)$  یا  $\rho(r_X) \equiv \sigma(r_X)$  به عنوان معیارهای ریسک عمل می‌کنند.<sup>۳</sup>

همچنین اگرچه فرض می‌شود ریسک و بازدهی سبد دارایی قابل‌الگوسازی است، مناسب بودن این فرض به لحاظ تجربی بررسی و نواقص آن مشخص شده است. بازدهی‌های برآوردی، توزیع نرمال ندارد و بجای آن دارای ویژگی‌های زیر است:

۱- دارای دم‌های پهن‌تر از توزیع نرمال است.

۲- بجای اینکه متقارن باشد، چولگی دارد، یعنی  $(E\{[X - E(X)]^3\} \neq 0)$ .

۳- کشیده‌تر از توزیع نرمال هستند، یعنی مقدار عددی چهارمین گشتاور برای آنها بزرگ‌تر از

مقدار عددی این کمیت برای توزیع نرمال است؛  $(E\{[X - E(X)]^4\} > 3)$ .

علاوه بر این، توزیع‌های تجربی شامل مقادیر تحقق‌یافته‌ای در انتهای توزیع هستند که احتمال وقوع آنها حتی خیلی بیشتر از توزیع‌های دم پهن<sup>۴</sup> است (فبوزی، نیو و ژو ۲۰۱۲).

۱- می‌توان از سایر معیارهای پراکندگی همچون میانگین قدرمطلق انحراف نیز استفاده کرد که به صورت  $E[|X - E(x)|]$  تعریف می‌شوند. انتخاب از میان معیارهای پراکندگی تا حد زیادی منعکس‌کننده مشخصه‌های مهم مسئله است. برای مثال، در مقایسه با واریانس، معیار میانگین قدرمطلق انحراف که در بالا تعریف شد وزن کمی به نتایج حدی می‌دهد.

۲- واریانس معیار مناسب ریسک تنها برای توزیع‌های متقارن است.

۳- دو مدل اصلی قیمت‌گذاری شامل مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای و نظریه قیمت‌گذاری آربیتراژ (APT) هستند که اولی نظریه محور و دومی تجربه محور است. در این مدل‌ها نیز توزیع بازدهی‌ها با استفاده از دو گشتاور اول (ارزش انتظاری و واریانس) توصیف می‌شوند.

همچنین ممکن است ضریب همبستگی خطی، وابستگی بین ریسک‌های متغیرهای تصادفی انفرادی را که توزیع‌های برآوردی تجربی دارند، به درستی توصیف نکنند و این امکان وجود دارد که رتبه‌بندی‌های ریسک-بازدهی حاصل از مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای، نتواند جواب‌های مربوط به مسأله‌های حداکثرسازی مطلوبیت مربوطه را به درستی مشخص کند، از این رو ملاک‌های دیگری معرفی شده است.

### ۳-۲-رتبه‌بندی تصادفی<sup>۱</sup>

گفته می‌شود اندازه ریسک  $\rho(\cdot)$  با رابطه رتبه‌بندی تصادفی<sup>۲</sup> سازگار است اگر برای تمامی توابع مطلوبیت متعلق به یک گروه معین،  $E[u(x)] \Rightarrow E[u(Y)]$  بر این امر دلالت داشته باشد که به ازای تمامی لاتاری‌های مجاز  $X \leq_D Y$  (که در آن نماد  $\leq_D$  نشان‌دهنده یک رابطه تسلط خاص است) داشته باشیم:  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ .

با توجه به آنکه زمانی که توزیع‌های ثروت یا مطلوبیت انتظاری شرایط خلاصه‌شده در رابطه رتبه‌بندی خاص را تأمین می‌کند، سازگاری می‌تواند مجموعه‌ای از انتخاب‌های سبب‌بینه را مشخص کند، از این رو بررسی رابطه اندازه‌های ریسک با معیارهای تسلط مفید خواهد بود.<sup>۳</sup>

### ۳-۲-۱- تسلط درجه اول

تسلط تصادفی درجه اول<sup>۴</sup> ( $FSD$ ) زیرمجموعه‌ای از تمامی لاتاری‌های ممکن را برای تمامی عوامل اشباع‌ناپذیر رتبه‌بندی می‌کند. مجموعه تمامی توابع مطلوبیتی که نشان‌دهنده عوامل اشباع‌ناپذیر هستند، یعنی مجموعه شامل تمامی توابع مطلوبیت غیرنزولی، را با  $U_1$  نشان می‌دهیم. در مفهوم تسلط تصادفی درجه اول گفته می‌شود  $X$  بر  $Y$  تسلط دارد و آن را با  $X \geq_{FSD} Y$  نشان می‌دهند، اگر عامل اشباع‌ناپذیر به صورت ضعیف  $X$

1- Stochastic Ordering

2- Stochastic- order- relation

3- Machina, Mark J., and Michael Rothschild (2008)

4- First- degree Stochastic Dominance (FSD)

را به  $Y$  ترجیح دهد. برحسب مطلوبیت انتظاری،  $E[u(X)] \geq E[u(Y)] \leftrightarrow X \geq_{FSD} Y$  به ازای هر  $u \in U_1$ . به زبان تکنیکی، رابطه تسلط تصادفی درجه اول از طریق قضیه (الف) بیان شده است که نشان می‌دهد آزمون تسلط تصادفی درجه اول مستلزم مقایسه توزیع‌های احتمال تجمعی لاتاری‌ها است.

قضیه (الف).  $X \geq_{FSD} Y$  اگر و تنها اگر به ازای تمامی  $x$ ‌ها در دامنه توابع توزیع

$$F_X(x) \leq F_Y(y) \text{ وجود داشته باشد.}^1$$

هنگامی که شرایط قضیه (الف) تأمین می‌شود، تسلط تصادفی درجه اول برای تمامی تصمیم‌گیران اشباع‌ناپذیر، رتبه‌بندی سازگاری می‌دهد:  $X \geq_{FSD} Y$  اگر و تنها اگر به ازای تمامی توابع مطلوبیت غیرنزولی  $u \in U_1$ ، رابطه  $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$  وجود داشته باشد.<sup>۲</sup> برای مثال: اگر  $X \geq_{FSD} Y$  آنگاه  $\rho^*(X) \leq \rho^*(Y)$  شرط  $E(X) \geq E(Y)$  برای  $X \geq_{FSD} Y$  لازم است.<sup>۳</sup>

تسلط تصادفی درجه اول، رتبه‌بندی جزئی نسبتاً محدود است، یعنی تنها قادر به رتبه‌بندی لاتاری‌هایی است که توابع احتمال آنها در هیچ نقطه‌ای در دامنه خود یکدیگر را قطع نمی‌کنند. با اعمال محدودیت‌های بیشتر بر ترجیحات عاملان می‌توان لاتاری‌های بیشتری را رتبه‌بندی کرد.

### ۳-۲-۲- تسلط درجه دوم

تسلط تصادفی درجه دوم<sup>۴</sup> ( $SSD$ ) در ادبیات ریسک بسیار مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعه تمامی توابع مطلوبیتی که هم غیرنزولی هستند و هم مقعر را با  $U_2$  نمایش

1- Hadar, Josef, and William Russell. 1969, & Rothschild, Michael, and Joseph Stiglitz. 1970. & Machina, Mark J., and Michael Rothschild. (2008).

2- Machina and Rothschild. (2008).

۳- رتبه‌بندی بر اساس میانگین‌ها برای تسلط تصادفی درجه اول کافی نیست. اگر  $E(X) \geq E(Y)$  باشد، لزوماً به این معنی نیست که هر عامل اشباع‌ناپذیر لزوماً  $X$  را ترجیح خواهد داد. در واقع عاملان اشباع‌ناپذیری وجود دارند که  $X$  را انتخاب می‌کنند و عاملان اشباع‌ناپذیر دیگری هستند که  $Y$  را انتخاب خواهند کرد.

4- Second- Degree Stochastic Dominance

می‌دهیم. در نتیجه  $U_2$  نشان‌دهنده عاملان ریسک‌گریز اشباع‌ناپذیر است و  $U_2$  مجموعه  $U_1$  را نیز دربر می‌گیرد. در مفهوم تسلط تصادفی درجه دوم، گفته می‌شود لاتاری  $X$  بر لاتاری  $Y$  تسلط دارد و آن را با  $X \geq_{SSD} Y$  نشان می‌دهند، اگر یک عامل ریسک‌گریز اشباع‌ناپذیر به طور ضعیف  $X$  را بر  $Y$  ترجیح دهد. بر حسب مطلوبیت انتظاری، تسلط تصادفی درجه دوم نیز یک رتبه‌بندی سازگار است:

$$u \in U_2 \quad X \geq_{SSD} Y \leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)]$$

به ازای تمامی  $u \in U_2$  آزمون برای تسلط تصادفی درجه دوم، آزمون انتگرال است.

قضیه (ب). اگر  $X \geq_{SSD} Y$  و تنها اگر  $\int_{-\infty}^a F(x)dx \leq \int_{-\infty}^a F(y)dy$  به ازای تمامی

$a$ ها در دامنه  $F(x), F(y)$ .

همانند تسلط تصادفی درجه اول، شرط  $E(X) \geq E(Y)$  یک شرط لازم برای تسلط تصادفی درجه دوم است. با این حال، برخلاف تسلط تصادفی درجه اول، تا زمانی که معادله (۲) برقرار باشد، توابع توزیع می‌توانند یکدیگر را قطع کنند و شرط انتگرال برای تسلط تصادفی درجه دوم محدودیت کمتری ایجاد می‌کند.

رونچایلد و استیگلitz (۱۹۷۰، ۱۹۷۱) نیز یک رتبه‌بندی تسلط مطرح کردند که مستلزم ریسک‌گریز بودن عاملان بود، اما لزومی به اشباع‌ناپذیر بودن آنها ندارد.<sup>۱</sup>

رتبه‌بندی‌های تسلطی، با اعمال محدودیت‌های متعدد بر مجموعه ترجیحات طبقه سبدهایی را که می‌توان با یک رتبه‌بندی مشخص مرتب کرد، گسترش می‌دهد. برای مثال، تسلط تصادفی درجه دوم، متغیرهای تصادفی بیشتری را نسبت به تسلط تصادفی درجه اول (برای زیرمجموعه‌ای از  $U_1$ ) رتبه‌بندی می‌کند.<sup>۲</sup> همچنین یافتن سبدهایی که یک رتبه‌بندی رتبه‌بندی تسلطی را برقرار کنند، همیشه کار محاسباتی ساده‌ای نیست، به ویژه اگر این سبدها

#### 1- Rothschild and Stiglitz

۲- امکان گسترش رتبه‌بندی‌های تصادفی درجه بالاتر وجود دارد که از پارامترهای بیشتری استفاده می‌کند (برای مثال، به میلن و نیوا (۱۹۹۴) مراجعه کنید). نتایج میلن-نیوا از متغیرهای استاندارد شده حاصل شده است، یعنی متغیرهایی با نتایجی که با بخش انتخابی اصلی سازگاری دارد. نقض‌هایی می‌تواند برای توزیع‌هایی که نتایج آنها با بخش انتخابی اصلی سازگاری ندارد، ایجاد شود، اما اگر بخش اصلی به طور متناسب بازتعریف شود، این نقض‌ها باقی نمی‌ماند.

شامل ابزارهای مالی بسیاری با اشکال توزیع بازدهی مختلفی باشد. بنابراین، اندازه‌های ریسک مبتنی بر رتبه‌بندی‌های تسلطی، تنها یک جواب جزیی برای مسائل انتخاب سبدهای بهینه فراهم می‌کند.

### ۳-۳- اصول موضوعه برای اندازه‌های منسجم ریسک

مفهوم اندازه‌های منسجم در تلاش برای اصلاح نواقص معیارهای ریسک و به خصوص برای رفع مشکلات مربوط به معیار ارزش در معرض خطر مطرح شد. ارتزرنر، دلپاین، ایبر و هیس (۱۹۹۹) اندازه‌های منسجم ریسک را به‌عنوان اندازه‌ای تعریف می‌کنند که با چهار اصل موضوعه زیر مطابقت داشته باشد:

- همگنی مثبت: به‌ازای تمامی متغیرهای تصادفی  $X$  و تمامی اعداد حقیقی مثبت  $t$ ،  

$$\rho(tX) = t\rho(X)$$
 باشد.

- زیر جمعیتی (خاصیت متنوع‌سازی): به‌ازای تمامی متغیرهای  $X$  و  $Y$  داریم:  

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

- یکنوایی<sup>۱</sup>: به‌ازای تمامی متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$ ، رابطه  $X \leq Y$  بر این امر دلالت دارد که  $\rho(Y) \leq \rho(X)$ <sup>۲</sup>.

- ثبات نسبت به تبدیل<sup>۳</sup>: به‌ازای تمامی متغیرهای تصادفی  $X$ ، تمامی نتایج مطمئن  $k$  و تمامی اعداد حقیقی  $\alpha$ ، داریم:  

$$\rho(X + k) \leq \rho(X) - \alpha$$

در صورت تامین چهار اصل موضوعه  $ADEH$ ، گفته می‌شود  $\rho$  یک اندازه منسجم ریسک است. این چهار اصل موضوعه، معیار واحدی را تعریف نمی‌کنند، بلکه

#### 1- Monotonicity

۲- نیم‌واریانس با مربع جمله منفی  $X - E(X)$  تعریف شده است. برای مشاهده این موضوع، فرض کنید  $Y \equiv \min[X - E(X), 0]$ . بنابراین، جملات غیرصفر  $Y$ ، نتایج کاهش ارزش را تعریف می‌کند و نیم‌واریانس به صورت  $E[Y^2]$  تعریف می‌شود.

#### 3- Translation Invariance

چندین گزینه برای اندازه ریسک ارائه می‌کنند، این در حالی است که اندازه ریسک آومان-سرانو با دو اصل موضوعه به‌طور منحصر به فرد تعریف می‌شود.

#### ۴- یک الگو برای اندازه ریسک بر اساس ایده‌های اقتصادی

##### ۴-۱- اندازه اقتصادی ریسکی بودن آومان-سرانو

اندازه آومان-سرانو (۲۰۰۸) قابلیت‌های رتبه‌بندی معیارهای مبتنی بر میانگین و واریانس و معیارهای مبتنی بر تسلط تصادفی را گسترش می‌دهد. همچنین اندازه آومان-سرانو روابط بین ریسکی بودن سبدها و اوراق بهادار تشکیل‌دهنده آن را به‌ازای اشکال دلخواهی توزیع‌ها ارائه می‌کند. این معیار هم توصیف عمومی از ریسکی بودن لاتاری‌ها است و هم به معیارهای ریسک‌گریزی موضعی ارو-پرات مرتبط است. در بخش بعد دو اصل موضوعه بیان می‌شود<sup>۱</sup> که مبنای اندازه آومان-سرانو است، سپس ویژگی‌های اصلی اندازه بررسی می‌شود.

##### ۴-۲- اصول موضوعه آومان-سرانو

گفته می‌شود لاتاری  $X$  ریسکی‌تر از لاتاری  $Y$  است اگر  $\rho^*(x) \geq \rho^*(y)$  باشد که در آن  $\rho^*(\cdot)$  نشان‌دهنده ریسکی بودن آومان-سرانو است. تابع  $\rho^*(\cdot)$  با یک جفت اصل موضوعه به‌طور منحصر به فرد تعریف می‌شود که این اصول موضوعه به ترتیب اصل موضوعه دوگانگی<sup>۲</sup> و اصل موضوعه همگنی مثبت<sup>۳</sup> است.

برای تعریف تابع  $\rho^*(\cdot)$  ابتدا لازم است مفهوم «به‌طور یکنواخت ریسک‌گریزتر بودن»<sup>۴</sup> که نسبت به ریسک‌گریزی ارو-پرات یک شرط قوی‌تری است، معرفی شود. در صورتی گفته می‌شود تابع مطلوبیت  $u_1$  ریسک‌گریزتر از تابع مطلوبیت  $u_2$  است که به‌ازای بعضی  $w$ ها

۱- هدف از بکارگیری این اصل موضوعه بیان چارچوبی است که تحلیل در آن انجام می‌شود.

2- Duality Axiom

3- Positive Homogeneity Axiom

4- Uniformly More Risk Averse





#### ۴-۳- قضیه اندازه ریسکی بودن آومان- سرانو

قضیه زیر، اندازه ریسکی بودن را تعریف می‌کند:

قضیه اندازه ریسکی بودن آومان سرانو: در صورت برقراری اصول دوگانگی و همگنی مثبت هر لاتاری  $X$ ،  $\rho^*(X)$  به‌طور منحصر به فردی به‌عنوان جواب رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$1 - E[e^{-x/\rho^*(x)}] = 0 \quad (1)$$

#### اثبات قضیه آومان- سرانو

قضیه فرعی (۱): اگر  $\rho_i(w) \leq \rho_j(w)$  آنگاه برای تمام مقادیر  $w$  داریم:

$$u_i(w) \geq u_j(w)$$

لم ۱: در صورتی که در سطح ثروت  $w$  ریسک‌گریزی شخص  $i$  بیشتر از شخص  $j$  باشد:

$$\rho_i(w) > \rho_j(w)$$

در این صورت به ازای یک مقدار مثبت  $\delta < 0$  و برای سطوحی از ثروت که در قید  $|w| < \delta$  صدق کنند، داریم:

$$u_i(w) < u_j(w)$$

رابطه (۱-۱): فرد  $i$  به صورت یکنواختی ریسک‌گریزتر از فرد  $j$  نیست اگر و تنها اگر

$$\rho_i(w_i) > \rho_j(w_j) \text{ برای تمام سطوح ثروت } w_i \text{ و } w_j.$$

#### اثبات رابطه (۱)

$$1 - E[e^{-x/\rho^*(x)}] = 0$$

با فرض تابع مطلوبیت  $CARA$  به شکل زیر و با فرض  $\alpha > 0$  داریم:

$$u_\alpha(x) = \frac{(1 - e^{-\alpha x})}{\alpha}$$

این تابع مطلوبیت، معادله (۱) را برآورده می‌کند پس با استفاده از لم ۱ منحنی‌های آن تودرتو<sup>۱</sup> هستند و برای تمام  $x$  های مخالف صفر داریم:

$$\text{if } \alpha > \beta \text{ then } u_{\alpha}(x) < u_{\beta}(x) \quad (۲)$$

برای اثبات وجود یک  $R(g) > 0$  منحصر به فرد که رابطه (۱) را برآورده کند تابع زیر را در نظر می‌گیریم که یک تابع محدب است:

$$f(\alpha) := Ee^{-\alpha g} - 1$$

$$f(0) = 0, f'(0) = -Eg < 0$$

به ازای یک  $M$  به اندازه کافی بزرگ داریم  $f(M) > 0$ . بنابراین یک  $\gamma > 0$  منحصر به

فرد وجود دارد که  $f(\gamma) = 0$  و ما تعریف می‌کنیم که  $R(g) := 1/\gamma$  باشد.

برای اینکه ببینیم که  $R$  تعریف دوگانگی را برآورده می‌کند، اجازه بدهید که زیرنویس‌های  $i, j, g, h$  همانند معادلات دیگر باشند و بدون از دست دادن کلیت مساله می‌توان  $w = 0$  قرارداد. با تعریف:

$$\gamma := 1/R(g), \quad \mu := 1/R(h), \quad \alpha_i := \inf \rho_i, \quad \alpha_j := \sup \rho_j$$

بنابراین (رابطه (۳)):

$$Eu_{\gamma}(g) = \frac{1 - Ee^{-\gamma g}}{\gamma} = 0, \quad Eu_{\mu}(h) = \frac{1 - Ee^{-\mu h}}{\mu} = 0 \quad (۳)$$

با فرض  $R(g) > R(h)$  بنابراین  $\mu > \gamma$ . به وسیله قضیه فرعی (۱) و به ازای تمام  $x$  ها رابطه (۴) را داریم:

$$u_i(x) \leq u_{\alpha_i}(x), u_j(x) \geq u_{\alpha_j}(x) \quad (۴)$$

حال با فرض  $Eu_i(g) > 0$  باید نشان دهیم که  $Eu_j(h) > 0$  است. با توجه به

رابطه (۴) و اینکه  $Eu_i(g) > 0$  نتیجه می‌شود که  $Eu_{\alpha_i}(g) > 0$ . با داشتن رابطه (۳)

داریم  $Eu_{\gamma}(g) = 0 < Eu_{\alpha_i}(g)$ . بنابراین با رابطه (۲) داریم  $\gamma > \alpha_i$  و با رابطه (۱,۱)

داریم  $\alpha_i \geq \alpha_j$  در نتیجه اگر  $\mu > \gamma$  باید  $\alpha_j < \mu$  باشد.

با داشتن روابط (۲)، (۳) و (۴) داریم  $0 = Eu_{\mu}(h) < Eu_{ai}(h) < Eu_{aj}(h)$

پس باید تابع  $R$  شرط دوگانگی را رعایت کند. تابع  $R$  همگن مثبت بوده و شرایط اصل موضوعه را دارا است. چنانچه فرض کنیم  $Q$  یک شاخص باشد که اصل موضوع را برآورده می‌کند. براساس برهان خلف می‌توان نشان داد که  $Q$  به صورت ترتیبی معادل  $R$  است.

برای اثبات اینکه  $Q$  یک ضریب مثبت از  $R$  است فرض کنید  $g_0$  یک لاتاری دلخواه، اما ثابت باشد و با قراردادن  $\lambda := \frac{Q(g_0)}{R(g_0)}$  به ازای هر لاتاری  $g$  داریم

$t := \frac{Q(g)}{Q(g_0)}$  در نتیجه  $Q(tg_0) = tQ(g_0) = Q(g)$  بنابراین

$tR(g_0) = R(tg_0) = R(g)$  و به دلیل تناظر ترتیبی بین  $Q$  و  $R$  داریم:

$$\frac{R(g)}{R(g_0)} = t = \frac{Q(g)}{Q(g_0)}$$

از این رو داریم  $\frac{Q(g_0)}{R(g_0)} = \frac{Q(g)}{R(g)} = \lambda$  که در نتیجه  $Q(g) = \lambda R(g)$

و در نهایت اثبات قضیه کامل شد.

#### ۴-۴- خواص $\rho^*(\cdot)$

این معیار ریسک می‌تواند به لحاظ مقداری اثرات تغییر میانگین و تغییر واریانس را به‌طور همزمان تشخیص دهد. بنابراین تابعی تعریف می‌شود که دامنه تعریف آن می‌تواند به‌طور مؤثری در فضای میانگین- واریانس لحاظ شود. از آنجا که هر نقطه در فضای میانگین- واریانس می‌تواند با یک ارزش از معیار ریسک به‌ازای خانواده مشخصی از توزیع‌ها مرتبط باشد<sup>۱</sup>، این اندازه (معیار) یک پیشرفت نسبت به روش‌های میانگین- واریانس تاریخی ایجاد کرد؛ چراکه، روش‌های پیشین

۱- خانواده توزیع‌های دوقطه‌ای و خانواده توزیع‌های نرمال.

نمی‌توانستند یک معیار کمی به تغییرات همزمان میانگین و واریانس نسبت دهند<sup>۱</sup>. اساساً، اثرات همزمان با محاسبات حداکثرسازی مطلوبیت انتظاری که برای تعریف  $\rho^*$  ( ) استفاده شده است، شناسایی می‌شود.

#### ۴-۴-۱- اندازه ریسک برای متغیرهای با توزیع نرمال

آومان-سرانو همچنین نشان دادند که اندازه ریسکی بودن برای متغیرهای با توزیع نرمال دقیقاً تعریف می‌شود. اگر  $X$  توزیع نرمال داشته باشد (رابطه (۵)):

$$\rho^*(X) \equiv \sigma^2(X) / 2E(X) \quad (5)$$

در صورت نرمال بودن توزیع دارایی‌های مورد بررسی استفاده از شاخص ریسکی بودن آومان سرانو و استفاده از انحراف معیار و یا واریانس، رتبه‌بندی یکسانی را در اختیار می‌گذارد (رابطه (۶)).

$$E[e^{-x/R}] = E[e^{-x/(\sigma^2/2\mu)}] = 1 \quad (6)$$

#### ۴-۴-۲- سایر خواص شاخص ریسک آومان - سرانو

آومان و سرانو خاصیت دیگری نیز برای  $\rho^*$  (۰) مطرح کردند که کاربرد گسترده تری دارد. این اندازه ریسکی بودن به ما امکان می‌دهد میزان ریسکی بودن یک سبد دارایی در مقایسه با ریسکی بودن اوراق بهادار مشمول آن مقایسه کنیم. برای هر لاتاری  $X$  و  $Y$ ، رابطه (۷) را داریم:

$$\rho^*(X+Y) \leq \rho^*(X) + \rho^*(Y) \quad (7)$$

یعنی باید گفت ریسکی بودن مجموع لاتاری‌ها بیشتر از مجموع اندازه‌های ریسک تک تک لاتاری‌ها نیست. این خاصیت به عنوان زیرجمعی (خاصیت متنوع‌سازی) شناخته

۱- البته، توابع مطلوبیت رویکرد مارکویتز، منحنی‌های بی‌تفاوتی را در فضای میانگین-واریانس تعریف می‌کند و هر نقطه روی منحنی بی‌تفاوتی می‌تواند به ارزشی در تابع مطلوبیت نسبت داده شود. در مقابل، به‌ازای یک خانواده توزیع‌های مشخص  $\rho^*$  ( )، امتیاز عددی منحصر به فردی را به هر نقطه در فضای میانگین-واریانس اختصاص می‌دهد.

می‌شود. علاوه بر این، اگر متغیرهای  $X$  و  $Y$  دارای توزیع مستقل و یکسانی باشند در این صورت نه تنها  $\rho^*(X) = \rho^*(Y)$  بلکه (رابطه (۸)):

$$\rho^*(X+Y) \leq \rho^*(X) = \rho^*(Y) \quad (۸)$$

یعنی هنگامی که دو متغیر دارای توزیع‌های مستقل و مشابهی جمع شوند،  $\rho^*(\cdot)$  افزایش نمی‌یابد. همچنین اگر به علاوه اگر  $X$  و  $Y$  همبستگی کامل مثبت داشته باشند (یعنی اگر لاتاری مشابهی باشند) پس (رابطه (۹)):

$$\rho^*(X+Y) = \rho^*(X) = \rho^*(Y) \quad (۹)$$

در نهایت، اگر دو متغیر دارای همبستگی منفی کامل باشند (مثلاً اگر  $X \equiv -Y$ )،  $\rho^*(X+Y)$  حداقل است، گرچه لزوماً معادل صفر نیست.<sup>۱</sup>

با بکار بردن ویژگی همگنی مثبت برای گزاره‌های بالا، بلافاصله کاربردهای نظری سبد دارایی به دست می‌آید. فرض کنید  $w$  و  $1-w$  وزن‌های مثبتی باشند. پس به‌ازای هر  $X$  و  $Y$  رابطه (۱۰) را داریم:

$$\rho^*(X/2 + Y/2) \leq \rho^*(X)/2 = \rho^*(Y)/2 \quad (۱۰)$$

بنابراین  $\rho^*(\cdot)$  تعمیمی طبیعی از بینش نظریه سبد دارایی مارکوفیتزی است. از اندازه ریسکی بودن می‌توان برای لاتاری‌های ترکیبی نیز استفاده کرد. برای مثال، اگر  $X$  و  $Y$  به‌ترتیب با احتمال‌های  $p$  و  $(1-p)$  ترکیب شوند و اگر  $\rho^*(X) \leq \rho^*(Y)$  باشد در این صورت، آومان و سرانو (۲۰۰۸، ص ۸۱۹) نشان دادند که (رابطه (۱۱)):

$$\rho^*(X) \leq \rho^*(pX + (1-p)Y) \leq \rho^*(Y) \quad (۱۱)$$

اندازه (شاخص) ریسک برای یک لاتاری ترکیبی (لاتاری مرکب از چند لاتاری) بین اندازه‌های ریسکی بودن تک تک لاتاری‌های مشمول در لاتاری ترکیبی قرار دارد.

همانطور که مشاهده شد معیار ریسکی بودن آومان-سرانو  $\rho^*(X)$  پیوسته<sup>۱</sup>، جمع‌پذیر ضعیف<sup>۲</sup> و سازگار با رتبه‌بندی تصادفی<sup>۳</sup> است.

### سازگاری شاخص ریسک آومان-سرانو با رتبه‌بندی تصادفی

همانند تسلط تصادفی درجه اول و تسلط تصادفی درجه دوم، شرط تسلط روچایلد-استیگلیتز یک رتبه‌بندی سازگار ارائه می‌دهد.  $\rho^*(0)$  به شرط تأمین روابط تسلط، رتبه‌بندی جزئی را گسترش می‌دهد. در مورد اخیر داریم:

$$\text{if } X \geq S_{FSD}Y, \text{ then } \rho^*(X) \leq \rho^*(Y)$$

همانگونه که در آومان و سرانو (۲۰۰۸) اثبات شده است، اندازه ریسک آومان-سرانو با تسلط روچایلد-استیگلیتز سازگار است.

### منسجم بودن اندازه ریسک آومان و سرانو

همگنی مثبت یکی از دو اصل موضوعه آومان-سرانو (۲۰۰۸) نیز بود. زیر جمعی (خاصیت متنوع‌سازی) یعنی  $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$  تضمین می‌کند که ترکیب متغیرهای تصادفی نمی‌تواند ریسکی بیش از مجموع ریسک تک تک متغیرها داشته باشد. این خاصیت یکی از پیامدهای اصول موضوعه آومان-سرانو است. همنوایی جزء اصول آومان-سرانو نبود. مبنای آومان و سرانو در اصول موضوعه خود ثبات نسبت به تبدیل مشابه  $ADEH$  ندارد، اما اندازه آنها با این مفهوم مطابقت دارد، چراکه در اندازه ریسک آومان-سرانو داشتیم  $\rho^*(X) \geq \rho^*(X+a)$  که در آن  $a$  یک عدد ثابت است.

همانطور که مشاهده شد این شاخص ریسک ویژگی‌های مطلوب یک معیار ریسک را دارد و در سال‌های اخیر اقبال بسیاری به سوی این اندازه ریسک بوده است و

---

1- Continuous  
2- Subadditive  
3- Consistent with Dominance Orderings

اکثر موضوعاتی که با معیارهای قدیمی بکار رفته اند طی سال‌های اخیر با این اندازه ریسک، مجدد انجام شده‌اند.

## معیارهای مقایسه عملکرد

### ۱- سبد با وزن‌های برابر

شواهد قابل توجهی وجود دارد مبنی بر اینکه بسیاری از سرمایه‌گذاران در نگهداری دارایی‌ها در سبد دارایی‌شان از قاعده تخصیصی ساده با وزن‌های برابر استفاده می‌کنند (بنارتزی و تالر، ۲۰۰۱ و هوپرمن و ژیانگ، ۲۰۰۶). در حالی که ریشه این عمل ممکن است برآمده از موضوعات رفتاری باشد با این حال سبدهای با وزن‌های برابر مستلزم تخمین پارامترها (میانگین و واریانس) نیست، بنابراین عواقب حاصل از تخمین نادرست این کمیت‌ها را در پی ندارد.

مؤلفان مختلفی (به خصوص دمیگول و همکاران، ۲۰۰۹ و پلایخا، ۲۰۱۲) به تازگی ویژگی‌های بازده سبدهای ساده با وزن‌های برابر را با بازده سبدهایی که با استفاده از قواعد پیشرفته مبتنی بر میانگین-واریانس حاصل شده بود را با هم مقایسه کردند. تقریباً در تمامی موارد و با استفاده از طیفی از معیارهای عملکرد (به عنوان مثال: نسبت شارپ متداول) سبدهای با وزن‌های برابر به طور قوی عملکرد بهتری نسبت به بازده سبدهای مبتنی بر مرز کارای میانگین-واریانس نشان می‌دهد.

### ۲- نسبت شارپ

شاخص شارپ اندازه بازدهی تعدیل شده برای ریسک بوده که در آن انحراف معیار به عنوان سنج ریسک لحاظ شده است (رابطه (۱۲)).

$$SR = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \quad (12)$$

که  $\bar{r}_p$  بازدهی مورد انتظار سبد،  $r_f$  نرخ بازدهی بدون ریسک و  $\sigma_p$  انحراف معیار بازدهی سبد است. این نسبت برای جواب به این پرسش می‌باشد که آیا بازدهی بالاتر حاصل قبول ریسک بالاتر بوده است یا خیر؟ این شاخص توسط شارپ (۱۹۶۶) معرفی شد و تاکنون به عنوان یکی از معیارهای مهم در انتخاب سبد توسط پژوهشگران و فعالان بازار بکار گرفته شده است (بودی، مارکوس و کین، ۲۰۰۹).

#### ۴- اندازه عملکرد اقتصادی (EPM)

هوم و پیگورج (۲۰۱۲) شاخص اقتصادی آومان-سرانو را برای تعیین سبد بهینه مورد استفاده قرار دادند. اندازه عملکرد اقتصادی (EPM) به جای نسبت شارپ معرفی شد که در آن به جای واریانس از شاخص اقتصادی ریسک آومان-سرانو استفاده می‌شود. در صورتی که توزیع بازدهی نرمال داشته باشد دو شاخص نامبرده رتبه بندی یکسانی را در اختیار می‌گذارند (رابطه (۱۳)).

$$EPM = \frac{\bar{r}_p - r_f}{AS} \quad (13)$$

که  $\bar{r}_p$  بازدهی مورد انتظار سبد،  $r_f$  نرخ بازدهی بدون ریسک و  $AS$  اندازه ریسک آومان-سرانو برای سبد مورد بررسی است.

#### ۵- کاربرد و تخمین شاخص‌های (اندازه‌های) ریسک برای شرکت‌های منتخب

در تحقیق حاضر پس از محاسبه شاخص‌های متفاوت ریسک، عملکرد هر سبد بر اساس سه شاخص بازده سبدهای با وزن برابر، شارپ و اندازه عملکرد اقتصادی (EPM) مقایسه می‌شود.

#### ۵-۱- داده‌های تحقیق

در تحقیق پیش رو داده‌های ۲۳ شرکت برتر حاضر در بورس اوراق بهادار تهران برای دوره زمانی فروردین ۱۳۸۷ تا آذرماه ۱۳۹۳ مورد بررسی قرار می‌گیرد. این داده‌ها از ۱۱ صنعت



مختلف انتخاب شدند<sup>۱</sup> و سری زمانی قیمت‌های پایانی پس از تعدیل افزایش سرمایه و سود سهام مورد استفاده قرار گرفت. با توجه به تحقیقات گذشته و برای دقت و اعتبار بیشتر نتایج تحقیق شرکت‌های انتخاب شده دارای ویژگی‌های ذیل هستند:

- سهام شرکت‌های مورد نظر حداقل ۵۰ درصد روزهای معاملاتی (حداقل ۱۲۵ روز در سال) در بورس اوراق بهادار تهران مورد معامله قرار گرفته باشند. روزهای معاملاتی با کسر روزهای تعطیل ۲۵۰ روز در نظر گرفته شد.

- شرکت‌هایی که سال مالی آنها منتهی به ۱۲/۲۹ باشد.

- بازده شرکت در دوره مورد مطالعه مثبت باشد.

نمودار روند قیمتی ۳۲ شرکت مورد بررسی در پیوست ارائه شده است. تمام محاسبات با استفاده از نرم افزار *MATLAB* انجام گرفت. در این راستا دو برنامه در نرم‌افزار *MATLAB 2015* نوشته شده است؛ در برنامه اول یک کد به عنوان یک تابع برای محاسبه اندازه ریسکی بودن آومان-سرانو نوشته و در برنامه دوم که برنامه اصلی بوده، ملاک‌های مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته است.<sup>۲</sup>

## ۲-۵- نتایج تحقیق

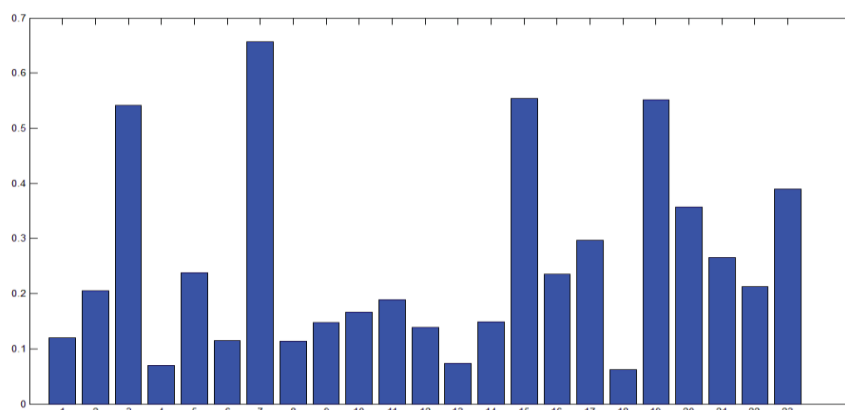
در مرحله اول میزان ریسکی بودن خرید یک سهم در ابتدای هر دوره با استفاده از دو روش واریانس و آومان-سرانو تعیین شد (نمودار (۲)) و در نمودار (۳) مقایسه انحراف معیار قیمت‌های پایانی روزانه برای ۳۲ شرکت مورد بررسی، نشان داده شده است.

۱- لیست صنایع و شرکت‌های مورد بررسی در پیوست مقاله آمده است.

۲- برنامه مربوط به بهینه‌سازی و محاسبه شاخص آومان-سرانو در این مقاله توسط مولفین نوشته شده است. برای محاسبه عددی معادله مربوط به شاخص ریسک آومان-سرانو از روش‌های بهینه‌سازی متعددی استفاده شد، اما به دلیل اینکه عمده روش‌ها دارای چند جواب موهومی بود از روش ژاکوبین و تابع *optimset* استفاده شد.

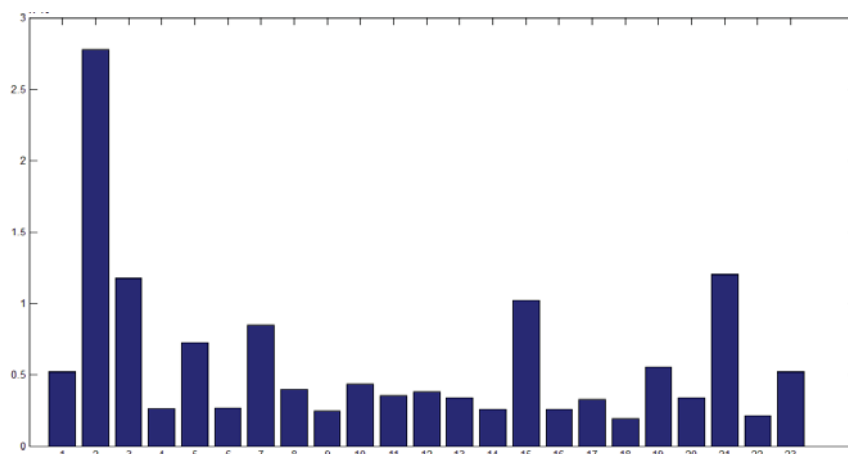
جدول (۱)- شاخص ریسکی بودن آومان- سرانو در شرکت‌های منتخب بورس اوراق بهادار تهران

شرکت	شاخص آومان- سرانو	شرکت	شاخص آومان- سرانو
پتروشیمی خارک	۰/۱۲	نفت بهران	۰/۰۷
گروه صنعتی بارز	۰/۲۰	مخابرات ایران	۰/۱۵
س. بانک ملی	۰/۵۴	س. بوعلی	۰/۵۵
س. غدیر	۰/۰۷	س. صندوق بازنشستگی	۰/۲۴
س. آتیه دماوند	۰/۲۴	س. معدن و فلزات	۰/۳۰
گروه مپنا	۰/۱۱	س. امید	۰/۰۶
ملی سرب و روی	۰/۶۶	سیمان فارس و خوزستان	۰/۵۵
داروئی جابر	۰/۱۱	س. توکا فولاد	۰/۳۶
فولاد مبارکه	۰/۱۵	سیمان درود	۰/۲۶
کالسمین	۰/۱۷	صنعتی بهشهر	۰/۲۱
ایران ترانسفو	۰/۱۹	تراکتورسازی ایران	۰/۳۹
نفت پارس	۰/۱۴		



نمودار (۲)- مقایسه میانگین شاخص ریسکی بودن آومان- سرانو برای داده‌های روزانه ۲۳ شرکت حاضر در بورس اوراق بهادار تهران<sup>۱</sup>

۱- نام شرکت‌های بورسی منطبق با شماره محور افقی در پیوست (۱) ذکر شده است.



نمودار (۳) - انحراف معیار داده‌های روزانه ۲۳ شرکت حاضر در بورس اوراق بهادار

### ۳-۵- مقایسه عملکرد سه شاخص «عملکرد اقتصادی» و «بازده سبد با وزن

برابر» و «شارپ در تشکیل سبد بهینه»

در عملکرد شاخص اقتصادی، ریسکی بودن آومان-سرانو در انتخاب سبد بهینه سهام برای دوره مورد بررسی صورت گرفت. مقایسه عملکرد سبد سهام بر اساس شاخص اندازه عملکرد اقتصادی (EPM) در مقایسه با سبد سهام بر اساس شاخص شارپ نشان از برتری شاخص ریسک‌گریزی اقتصادی آومان-سرانو دارد. تشکیل سبد بر اساس استراتژی ساده انتخاب بالاترین شاخص عملکرد اقتصادی در سال جاری و نگهداری سهم در سال بعد صورت گرفته است. جهت مقایسه بازدهی سبد با وزن‌های برابر نیز در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۲) - مقایسه شاخص عملکرد اقتصادی و شاخص شارپ در تشکیل سبد بهینه

بازده سالانه	سبد بر اساس
۳۵/۹	وزن یکسان
۱۹/۷	شاخص شارپ
۵۰/۶	شاخص عملکرد اقتصادی

سبد بر اساس شاخص عملکرد اقتصادی با بازدهی سالانه ۵۰/۶ درصد عملکرد بهتری نسبت به سبد با وزن برابر و سبد بر اساس شاخص شارپ داشت. مقایسه نتایج با بازدهی سالانه در جدول پیوست نیز حاکی از مناسب بودن بازدهی سبد بر اساس شاخص ریسکی بودن آومان-سرانو است.

## ۶- نتیجه‌گیری

در اقتصاد مالی معمولاً از توزیع نرمال برای نشان دادن احتمال وقوع پیامدها به خصوص در رابطه با بازده دارایی‌ها استفاده می‌شود. از آنجا که توزیع نرمال بر حسب دو پارامتر میانگین و واریانس توصیف شود، روابط ریسک-بازدهی سبد دارایی‌ها را نیز می‌توان با استفاده از همین دو پارامتر توصیف کرد، اما مطالعات اخیر نشان می‌دهند که این معیارها معایب قابل توجهی دارد.

در پی تلاش برای رفع این محدودیت‌های معیارهای مبتنی بر انحراف معیار و واریانس، اندازه‌های جدید مختلفی برای ریسک معرفی شد. یکی از مهم‌ترین معیارهای مورد استفاده طی سال‌های اخیر شاخص ریسک آومان-سرانو است. اندازه ریسکی بودن آومان-سرانو یک معیار بسیار مناسب برای اندازه‌گیری ریسک در اقتصاد مالی است.

در تحقیق حاضر، شاخص ریسکی بودن آومان-سرانو در بورس اوراق بهادار تهران محاسبه و کارایی آن مورد ارزیابی قرار گرفت. بعد از محاسبه این شاخص برای ۲۳ شرکت منتخب از صنایع مختلف حاضر در بورس اوراق بهادار تهران اقدام به تشکیل سبد بهینه بر اساس شاخص ریسکی بودن آومان-سرانو شد. در گام بعد برای مقایسه عملکرد این شاخص در اندازه‌گیری ریسک و ساختن سبد بهینه از سه ملاک مختلف شامل: ۱- سبدهایی با وزن‌های برابر، ۲- سبدهایی بر اساس نسبت شارپ و ۳- سبدهایی بر اساس اندازه عملکرد اقتصادی (مبتنی بر اندازه ریسکی بودن آومان-سرانو) نشان داد که استفاده از شاخص اندازه عملکرد اقتصادی (EPM) عملکرد بهتری در سبدهایی دارد به طوری که سبد بر اساس شاخص عملکرد اقتصادی با بازدهی سالانه ۵۰/۶ درصد عملکرد

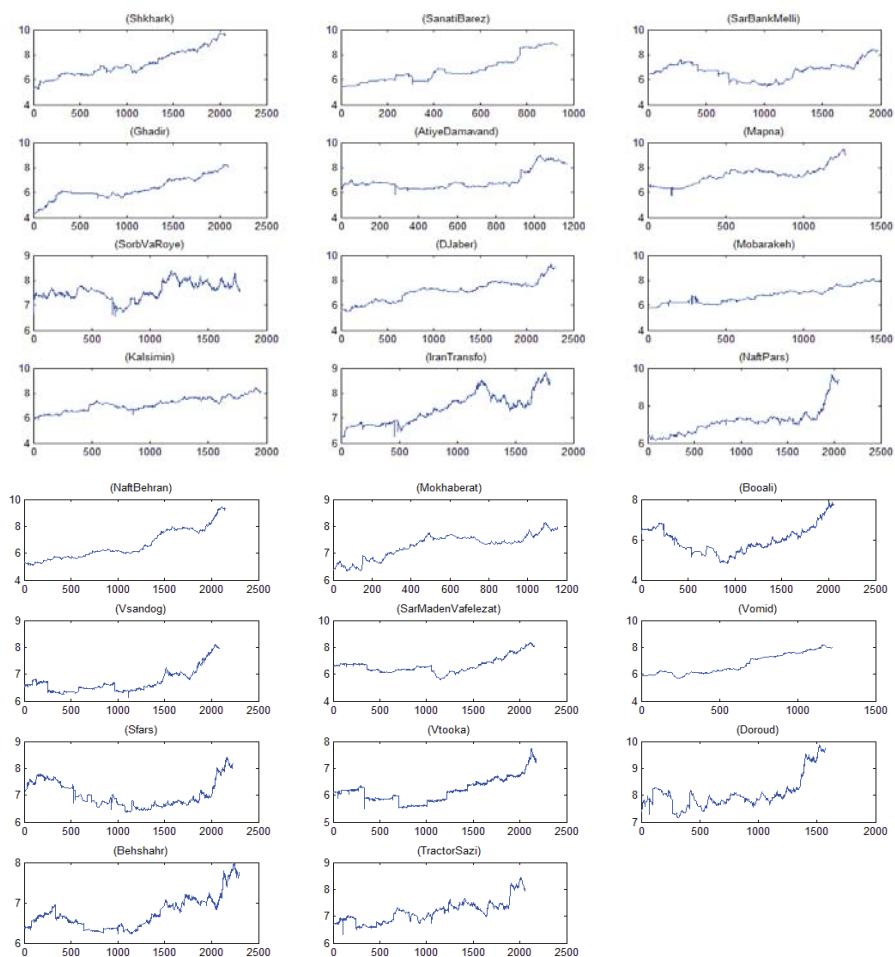
بهتری نسبت به سبد با وزن برابر و سبد بر اساس شاخص شارپ داشت. برای محاسبه بازدهی واقعی پیشنهاد می‌شود تورم سالانه در محاسبات لحاظ شود.

ارزیابی روش‌های جدید تخمین شاخص آومان-سرانو و مقایسه شاخص ریسکی بودن آومان-سرانو در سایر بازارها نظیر قراردادهای آتی، سکه و ارز می‌تواند در تحقیقات آتی مورد بررسی قرار گیرد.

پیوست

شرکت های منتخب در بورس اوراق بهادار تهران

ردیف	شرکت	صنعت	نماد بورسی	بازده سالانه (درصد)
۱	پتروشیمی خارک	پتروشیمی	شخارک	۵۵
۲	گروه صنعتی بارز	لاستیک	پکرمان	۳۹
۳	س. بانک ملی	سرمایه‌گذاری	وبانک	۲۱
۴	س. غدیر	سرمایه‌گذاری	غدیر	۴۷
۵	س. آتیه دماوند	سرمایه‌گذاری	وآتی	۳۳
۶	گروه مپنا	خدمات فنی و مهندسی	رمپنا	۵۴
۷	ملی سرب و روی	فلزات اساسی	فسرب	۱۱
۸	دارویی جابر	دارویی	دجابر	۴۳
۹	فولاد مبارکه	فلزات اساسی	فولاد	۴۲
۱۰	کالسمین	فلزات اساسی	فاسمین	۲۵
۱۱	ایران ترانسفو	تجهیزات برقی	بترانس	۲۶
۱۲	نفت پارس	فراورده های نفتی	شنتفت	۳۵
۱۳	نفت بهران	فراورده های نفتی	شبهرن	۵۱
۱۴	مخابرات ایران	مخابرات	اخابر	۳۷
۱۵	س. بوعلی	سرمایه‌گذاری	وبوعلی	۱۶
۱۶	س. صندوق بازنشستگی	سرمایه‌گذاری	وصندوق	۱۵
۱۷	س. معدن و فلزات	کانه‌های فلزی	ومعادن	۱۶
۱۸	س. امید	سرمایه‌گذاری	وامید	۵۲
۱۹	سیمان فارس و خوزستان	سیمان، آهک و گچ	سفارس	۱۱
۲۰	س. توکا فولاد	سرمایه‌گذاری	وتوکا	۱۳
۲۱	سیمان درود	سیمان، آهک و گچ	سدور	۲۷
۲۲	صنعتی بهشهر	محصولات غذایی	غبشهر	۱۵
۲۳	تراکتورسازی ایران	ماشین‌آلات	تایرا	۱۵



نمودار (۱) - روند قیمتی ۲۳ شرکت حاضر در بورس اوراق بهادار تهران در بازه ۱۳۹۳-۱

## فهرست منابع

- طالبلو، رضا و عریانی، بهاره (۱۳۹۴)، *اقتصاد مالی*، جلد اول، چاپ اول، انتشارات سمت، ۵۰۰ صفحه، ترجمه کتاب *financial economics* تألیف F. Fabozzi, E. H. Neave, and G Zhou، انتشارات John Wiley and Sons، چاپ اول ۲۰۱۲
- رهنمای رودپشتی، فریدون و میرغفاری، سیدرضا (۱۳۹۰)، «ارزیابی عملکرد پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران: کاربرد ارزش در معرض خطر»، *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)*، ۲، شماره ۸، ۱۳۳-۱۵۰.
- سجاد، رسول؛ هدایتی، شراره و هدایتی، شهره (۱۳۹۳)، «برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از نظریه ارزش فرین در بورس اوراق بهادار تهران» *دانش سرمایه‌گذاری*، دوره ۳ شماره ۹، صص ۱۳۳ تا ۱۵۵.
- هیبتی، فرشاد؛ تقوی، مهدی و موسوی، سیدرضا (۱۳۹۳)، «ارزیابی تاثیر شاخص‌های کلاسیک و مدرن اندازه‌گیری ریسک بر انتخاب پرتفوی در چارچوب تئوری مالی رفتاری»، *دانش سرمایه‌گذاری*، دوره ۷، شماره ۱ (پیاپی ۲۱)، صص ۸۷-۹۹.
- کردبچه، حمید؛ حضوری، محمدجواد و مالمیر، علی (۱۳۹۱)، «اندازه‌گیری ریسک مازاد در صنعت صندوق‌های مشترک ایران»، *دانش سرمایه‌گذاری*، دوره ۱، شماره ۲، صص ۱۱۷-۱۴۰.
- سجاد، رسول و گرجی، مهسا (۱۳۹۱)، «برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از روش باز نمونه‌گیری بوت استرپ»، *فصلنامه مطالعات اقتصادی کاربردی ایران*، دوره ۱، شماره ۱، صص ۱۳۷-۱۶۴.
- میرغفاری، سیدرضا (۱۳۹۱)، «آزمون روش شارپ تجدیدنظرشده مبتنی بر ارزش در معرض خطر جهت ارزیابی عملکرد»، *دانش سرمایه‌گذاری*، دوره ۱، شماره ۴، صص ۱۳۳-۱۵۰.
- Aumann, R. J., & Serrano, R. (2008), "An Economic Index of Riskiness", *Journal of Political Economy*, 116(5), 810-836.
- Benartzi, S., Thaler, R., (2001), "Naive Diversification Strategies in Defined Contribution Savings Plans", *Am. Econ. Rev.* 91, 79-98.



- Bali, T. G., Cakici, N., & Chabi-Yo, F. (2011), "A Generalized Measure of Riskiness", *Management science*, 57(8), 1406-1423.
- Bennett, C.J. & Thompson, B.S. (2013), "Moving the Goalposts: Subjective Performance Benchmarks and the Aumann-Serrano Measure of Riskiness", Working Paper, SSRN
- Benninga, Simon. (2008), *Financial Modeling* (3rd ed.). Cambridge, MA: MIT Press.
- Bosch-Badia, M.T., Montllor-Serrats, J. & Tarrazon-Rodon, M.A. (2014), "Unveiling the Embedded Coherence in Divergent Performance Rankings", *Journal of Banking & Finance*, 42, 154-16
- Bodie, Zvi, Robert C. Merton, & David L. Cleeton. (2009), *Financial Economics* (2nd ed.), Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice- Hall.
- DeMiguel, Y., Garlappi, L., Uppal, R., (2009), "Optimal versus Naive Diversification: How Inefficient is the (1/N) Portfolio Strategy?", *Rev. Econ. Stud.* 22, 1915 – 1953
- Foster, D. P., & Hart, S. (2009), "An Operational Measure of Riskiness", *Journal of Political Economy*, 117(5), 785-814.
- Foster, D.P., & Hart, S. (2013), "A Wealth-Requirement Axiomatization of Riskiness", *Theoretical Economics*, 8, 591- 620.
- Hart, S. (2011), "Comparing Risks by Acceptance and Rejection", *Journal of Political Economy*, 119, 617-638. <http://dx.doi.org/10.1086/662222>
- Hadar, J., & Russell, W. R. (1969), "Rules for Ordering Uncertain Prospects", *A.E.R.*, 59:25–34.
- Heath, D., Delbaen, F., Eber, J. M., & Artzner, P. (1999), "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- Homm, U., & Pigorsch, C. (2012), "An Operational Interpretation and Existence of the Aumann–Serrano Index of Riskiness", *Economics Letters*, 114(3), 265-267.
- Homm, U., & Pigorsch, C. (2012), "Beyond the Sharpe ratio: An Application of the Aumann–Serrano Index to Performance Measurement", *Journal of Banking & Finance*, 36(8), 2274-2284.
- Huberman, G., Jiang, W., (2006), "Offering vs. Choice in 401(k) Plans: Equity Exposure and the Number of Funds", *J. Finan.* 61 , 763-801
- Kadan, O. & Liu, F. (2011), "Performance Evaluation with High Moments and Disaster Risk", Working Paper. <http://ssrn.com/abstract=2020724>
- Knight, Frank H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Hart, Schaffner, and Marx Prize Essays, No. 31. Boston: Houghton Mifflin
- Li, M. (2014), "On Aumann and Serrano's Economic Index of Risk", *Economic Theory*, 55(2), 415-437.

- Machina, Mark J., & Michael Rothschild. (2008), "Risk" in Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume (eds.), *The New Palgrave Dictionary of Economics* (2nd ed.). New York: Palgrave Macmillan.
- Meilijson, I. (2009), "On the Adjustment Coefficient, Drawdowns and Lundberg-Type Bounds for Random Walk", *The Annals of Applied Probability*, 19, 1015-1025. <http://dx.doi.org/10.1214/08-AAP567>
- Michaeli, M. (2014), "Riskiness for Sets of Gambles", *Economic Theory*, 56, 515-547.
- Plyakha, Y., Uppal, R., Vilkov, G., (2012), "why Does an Equal-Weighted Portfolio Outperform Value and Priceweighted Portfolios?", Working Paper, EDHEC Business School.
- Pratt, John W. (1964), "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica* 32: 122-136
- Resta, M. & Marina, M.E. (2015), "On a New Index Aimed at Comparing Risks", *Journal of Mathematical Finance*, 5, 119-128.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S. & Zabarankin, M. (2006), "Generalized Deviations in Risk Analysis", *Finance and Stochastics*, 10, 51-74.
- Riedel, F. & Hellmann, T. (2015), "The Foster-Hart Measure of Riskiness for General Gambles", *Theoretical Economics*, 10, 1-9. <http://dx.doi.org/10.3982/TE1499>
- Rothschild, M., & Stiglitz, J. E. (1970), "Increasing Risk: I. A Definition", *J. Econ. Theory* 2:225-43.
- Schulze, K. (2014), "Existence and Computation of the Aumann-Serrano Index of Riskiness and its Extension", *Journal of Mathematical Economics*, 50, 219-224.
- Schreiber, A. (2013), "Comparing Local Risk by Acceptance and Rejection", *Mathematical Finance*, Published Online. <http://dx.doi.org/10.1111/mafi.12054>
- Sharpe, W.F. (1966), "Mutual Fund Performance", *The Journal of Business*, 39, 119-138.
- Yaari, M. E. (1969), "Some Remarks on Measures of Risk Aversion and on Their Uses", *Journal of Economic Theory* 1, 315-329.