

مدل تعیین قیمت وارانتهی PRW با تولید کنندگان ریسک گریز

مهدی نصراللهی*

تاریخ دریافت: ۹۴/۸/۲۰

تاریخ پذیرش: ۹۵/۸/۹

چکیده

رقابت‌های بسیار شدید در بازار و نیز تقاضای متنوع مشتریان در سال‌های اخیر تولید کنندگان را مجبور به ارائه محصولات خود به همراه سیاست‌های متفاوت وارانتهی کرده است. در این میان، سیاست وارانتهی تسهیم هزینه یکی از پرکاربردترین سیاست‌های وارانتهی می‌باشد. این مطالعه با هدف حداکثر سازی سود تولید کننده به توسعه مدلی جهت تعیین قیمت بهینه وارانتهی تسهیم هزینه با دوره ثابت می‌پردازد که در آن تولید کننده ریسک گریز است. در طراحی این مدل، نرخ هزینه‌های اصلاح محصول در طول دوره وارانتهی تحت تاثیر نرخ تورم و بهره قرار دارند و نرخ شکست محصول نیز تابعی از زمان فرض شده است. با استفاده از فرایند ناهمگن پواسان و بکارگیری تابع مطلوبیت نمایی مدل ریاضی برای حداکثر سازی معادل قطعی سود تولید کننده ریسک گریز و تعیین قیمت بهینه وارانتهی ارائه شد. در انتها به کمک یک مثال عددی و با در نظر گرفتن عواملی مانند ترجیحات ریسک تولید کننده، پارامترهای متفاوت تابع توزیع شکست محصول، طول دوره وارانتهی، و نرخ تورم و تنزیل اعتبار سنجی مدل صورت پذیرفت.

واژگان کلیدی: وارانتهی PRW، ترجیحات ریسک، قیمت وارانتهی، نرخ شکست محصول، تورم

* استادیار گروه مدیریت صنعتی دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) m.nasrollahi@soc.ikiu.ac.ir

مقدمه

امروزه سازمان‌های بیشماری علاوه بر قیمت، کیفیت و ایمنی محصولات، از وارانتهی به عنوان یک عامل مهم در جلب نظر مشتریان بالقوه سود می‌برند (پارک و فام، ۲۰۱۶). وارانتهی تعهدی قراردادی است که تولید کننده، فروشنده و یا عرضه کننده را ملزم می‌کند تا نقایص و شکست‌های محصول در طول دوره وارانتهی را از طریق تعمیر یا تعویض برطرف نماید (یانگ، هی و هی، ۲۰۱۶). تغییرات سریع فن آوری و رقابت بسیار زیاد در بازار موجب افزایش پیچیدگی‌های محصولات جدید شده اند و ارزیابی آنها توسط مشتریان به سادگی امکان پذیر نیست؛ چرا که مشتریان در هنگام خرید محصول با عدم اطمینان در خصوص عملکرد آن مواجه هستند. در چنین شرایطی وارانتهی می‌تواند شاخص گویایی از قابلیت اطمینان محصول باشد و به عنوان ابزاری اثر بخش برای بهبود فروش تولید کنندگان ایفای نقش نماید (وانگ، لیو و لیو، ۲۰۱۵).

پیشنهاد‌های متفاوت وارانتهی را سیاست وارانتهی نامیده اند که بر اساس هزینه وارانتهی و هزینه تعمیر به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند: تعویض رایگان، تسهیم هزینه، و ترکیبی. به علاوه، بر اساس دوره زمانی وارانتهی نیز می‌توان دو سیاست دوره ثابت و دوره تجدید پذیر را متمایز کرد (نصراللهی، اصغری زاده، جعفرنژاد و صنیعی منفرد، ۱۳۹۳). به دلیل وجود بازارهای بسیار رقابتی، اهمیت انواع سیاست‌های وارانتهی که در زمان فروش محصول پیشنهاد می‌شوند برای تولید کننده و خریدار بسیار افزایش یافته است (جانگ، پارک و پارک، ۲۰۱۵). وارانتهی تسهیم هزینه یکی از انواع پر کاربرد سیاست‌های وارانتهی است که در آن بخشی از هزینه اصلاح محصول در طول دوره وارانتهی به مشتری تحمیل می‌گردد (یه و فانگ، ۲۰۱۴). مشتریان در هنگام خرید محصول همراه با وارانتهی PRW قیمت وارانتهی را که بخشی از قیمت محصول است پرداخت می‌کنند و تولید کننده نیز مسئولیت رفع شکست‌های محصول ناشی از ضعف در طراحی و تولید را در طی دوره وارانتهی بر عهده می‌گیرد (استامنکوویچ، پوپوویچ، اسپاسوژویچ و رادیوژویچ، ۲۰۱۱). بنابراین در صورتی که محصول با وارانتهی عرضه شود، تولید کننده در قیمت گذاری محصول با ریسک مقبول بودن قیمت نهایی از دیدگاه خریدار

مواجهه است (رحمان و چاتوپادهای، ۲۰۱۰). در عمل میزان ریسک گریزی یا ریسک پذیری تولید کننده بر قیمت وارانتهی به عنوان یکی از اجزای تشکیل دهنده قیمت نهایی محصول تاثیر می گذارد.

خریداران محصولاتی که تحت پوشش وارانتهی هستند، برای اصلاح محصولاتی که دچار شکست شده اند به تولید کننده مراجعه می کنند در حالی که چنانچه محصول تحت پوشش وارانتهی نباشد ممکن است خریداران برای رفع عیب محصول به سایر خدمت دهندگان مراجعه نمایند. چنانچه قیمت وارانتهی و هزینه های سهم خریدار در هر عملیات اصلاحی پایین تر از هزینه های اصلاح محصولات فاقد وارانتهی باشد، آنگاه خریداران به پوشش محصول با وارانتهی و پرداخت قیمت وارانتهی ترغیب می شوند.

بنابراین مدل سازی قیمت بهینه وارانتهی که شامل ترجیحات ریسک تولید کننده باشد ضروری است. اگرچه از زمان مطرح شدن مدل های وارانتهی تا کنون مطالعات بسیار زیادی در این حوزه صورت گرفته است اما مطالعات مرتبط با وارانتهی PRW و به ویژه ترجیحات ریسک هنوز جایگاه محدودی در طراحی مدل های وارانتهی در مقایسه با سایر رویکردهای وارانتهی دارند (نصراللهی و اصغری زاده، ۱۳۹۵) که در قسمت دوم مقاله به برخی از آنها اشاره می شود. بخش سوم مقاله به بررسی مدل کلی وارانتهی PRW اختصاص یافته است. در بخش چهارم، روش پژوهش به همراه نمادها و پیش فرض های مورد استفاده در مطالعه و نیز پایه های مدل مورد نظر ارائه شده اند. بخش پنجم مدل ریاضی طراحی شده را نشان می دهد و در بخش ششم نیز اعتبار سنجی مدل به کمک مثال عددی انجام می شود.

پیشینه پژوهش

سیاست های متفاوت وارانتهی موجب ایجاد هزینه های متفاوتی می شوند. ویژگی های سیاست های وارانتهی در تعیین هزینه های وارانتهی نقش اساسی دارند. بلیشکی و مورتی اولین دسته بندی جامع را در خصوص انواع سیاست های متفاوت وارانتهی انجام دادند (بلیشکی و مورتی، ۱۹۹۲). البته با افزایش پیچیدگی های محصول و نیز شدت یافتن رقابت ها سیاست های

وارانتهی نیز تغییر می‌کنند. به همین دلیل در مطالعه وارانتهی مفاهیم گوناگونی از علوم مختلف (مانند مهندسی، حسابداری، بازاریابی، حقوق، و ...) مورد توجه محققان بوده است (مورتی و جمال‌الدین، ۲۰۰۲). هر چند اولین مدل‌های احتمالی هزینه وارانتهی برای سیاست‌های تسهیم هزینه در سال‌های ۱۹۶۲ و ۱۹۶۸ توسعه داده شدند (نصراللهی و اصغری زاده، ۱۳۹۵) اما تا به امروز هم پژوهشگران با در نظر گرفتن مفروضات متفاوت به دنبال توسعه مدل‌های ریاضی برای سیاست‌های متفاوت وارانتهی هستند. در سال ۱۹۹۲ اولین مرور و دسته‌بندی جامع مدل‌های ریاضی وارانتهی صورت پذیرفت (مورتی و بلیشکی، ۱۹۹۲).

در سال ۱۹۸۶ محققان برای اولین بار چارچوب ارزیابی سیاست‌های وارانتهی برای محصولات غیر قابل تعمیر را بر اساس ترجیحات ریسک تولیدکننده و خریدار ارائه دادند (ریچکن و تاپیرو، ۱۹۸۶). در مطالعه دیگری سیاست وارانتهی تولیدکننده و اثرات آن بر رفتار مصرف‌کننده بررسی شده است. در این مطالعه فرض شده که مشتریان ترجیحات ریسک متفاوتی دارند و تولیدکننده با وجود معین بودن قابلیت اعتماد محصولات برای غلبه بر ریسک‌گریزی مشتریان ناگزیر به تعیین دوره‌های وارانتهی بلند مدت تری است (پادمانابهان و آو، ۱۹۹۳).

در سال ۱۹۹۵ چان و تانگ با در نظر گرفتن ریسک‌گریزی تولیدکننده و مشتری و همچنین فرض ثابت بودن نرخ شکست و هزینه تعمیر محصول، مدلی برای سیاست وارانتهی تعویض رایگان با دوره ثابت ارائه دادند تا برای یک دوره وارانتهی مشخص، قیمت بهینه وارانتهی را تعیین نماید (چان و تانگ، ۱۹۹۵). در مطالعه‌ای دیگر، مدلی برای تسهیم ریسک محصول به وسیله وارانتهی‌ها با مصرف‌کنندگان ریسک‌گریز ارائه شده است و مشخص شده که تسهیم ریسک بین بخش‌های ریسک‌گریز و ریسک‌خشی بر روی بازارهای انحصاری تاثیر زیادی نخواهد داشت (بوم، ۱۹۹۸). در یک تحقیق با فرض ناهمگن بودن مشتریان در نوع نگرش به ریسک‌های مرتبط با هزینه‌های تعمیر محصول مدلی برای قیمت‌گذاری پویا و تعیین سیاست وارانتهی دوره عمر ارائه شده است که بیان می‌کند تولیدکنندگان می‌بایست در هنگام تعیین قیمت و شرایط وارانتهی، میزان ریسک‌گریزی مشتریان را مورد توجه قرار دهند (ژو، لی و تانگ، ۲۰۰۹). در یکی از جدیدترین مطالعات انجام شده در این حوزه، پژوهشگران سعی

کردند ترجیحات ریسک تولید کننده و مصرف کننده را به وسیله در نظر گرفتن عدم اطمینان‌های دوره وارانتی برای سیاست وارانتی دوره عمر مشخص نمایند و با این هدف مدل‌های ترجیحات ریسک را برای یافتن قیمت بهینه وارانتی توسعه دادند (رحمان و چاتوپادهای، ۲۰۱۰).

بنابراین بررسی منابع در دسترس نشان می‌دهد که احتمالاً تاکنون مدل سازی سیاست وارانتی PRW با در نظر گرفتن ترجیحات ریسک تولید کننده مورد مطالعه قرار نگرفته است. از این رو با الگوگیری از مطالعه چان و تانگ و نیز رحمان و چاتوپادهای در این مقاله به منظور حداکثر سازی معادل قطعی سود تولید کننده با بکارگیری فرایند ناهمگن پواسان برای محصولات با شکست وابسته به زمان یک مدل قیمت وارانتی ارائه می‌شود.

وارانتی PRW

بر اساس طبقه بندی‌های ارائه شده، بسیاری از سیاست‌های وارانتی توسط دو متغیر تصمیم بسیار تاثیر گذار یعنی هزینه وارانتی^۱ و طول دوره وارانتی^۲ دسته بندی می‌شوند. اولاً بر مبنای میزان پرداخت مشتری برای تعمیر یا تعویض محصول سیاست‌های وارانتی به سه دسته تقسیم می‌شوند: سیاست تعمیر/ تعویض رایگان^۳ (FRW)، سیاست پرداخت بخشی از هزینه^۴ (PRW)، و سیاست ترکیبی^۵. ثانیاً با در نظر گرفتن مدت زمانی که ارائه دهنده وارانتی ملزم به ارائه خدمات مورد تعهد می‌باشد، سیاست‌های وارانتی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیاست دوره ثابت^۶ یا سیاست عدم تجدید دوره وارانتی و سیاست تجدید پذیر^۷ یا تجدید دوره وارانتی (توماس، ۲۰۱۰).

-
- 1- Warranty Cost (Price)
 - 2- Warranty Period
 - 3- Free Repair/ Replacement Warranty (FRW)
 - 4- Pro-Rata Warranty (PRW)
 - 5- Combined
 - 6- Fixed Period
 - 7- Renewable

یکی از پر کاربردترین سیاست‌ها جهت تامین هزینه‌های وارانتهی سیاست پرداخت بخشی از هزینه است که شامل تسهیم هزینه‌های تعمیر یا تعویض میان تولیدکننده و مشتری بر اساس فرمول‌های مبتنی بر عمر محصول است (اشراق نیا جهرمی و وحدانی، ۲۰۰۹). معمولترین فرمول محاسبه نسبت‌ها در این سیاست فرمول خطی می‌باشد. البته پژوهشگران شیوه‌های متفاوتی را برای نحوه تسهیم هزینه‌ها میان تولیدکننده و مشتری معرفی کرده‌اند (هوانگ، لیو، لی، لیو، و هی، ۲۰۰۸؛ پوپوویچ، استامنکوویچ و راکیسویچ، ۲۰۱۲). در یک دوره وارانتهی با مدت $[0, W]$ کل هزینه‌ای که در سیاست PRW بابت تعمیر/تعویض محصول به تولیدکننده تحمیل می‌گردد تابعی از زمان بروز شکست و هزینه انجام اصلاح توسط تولیدکننده بوده و به شکل رابطه ۱ محاسبه می‌شود (مورتی و بلیشکی، ۱۹۹۲):

$$C_t = \begin{cases} c_m(1 - x/W) & 0 \leq x < W \\ 0 & x \geq W \end{cases} \quad \text{رابطه ۱}$$

در سیاست وارانتهی دوره ثابت، دوره وارانتهی بر اساس زمان فروش محصول مشخص می‌شود و بدون توجه به تعمیر یا تعویض محصول وارانتهی شده ثابت می‌ماند. در نتیجه اگر یک محصول در طول دوره وارانتهی دچار شکست شود توسط وارانتهی دهنده رفع عیب خواهد شد و بدون هیچ گونه تغییری در قرارداد وارانتهی به مشتری بازگردانده می‌شود (توماس و رآو، ۱۹۹۹). بنابراین چنانچه کل هزینه هر بار اصلاح یک محصول برای تولیدکننده برابر c_m باشد، خریدار می‌باید طبق مفاد قرارداد وارانتهی PRW بخشی از این هزینه اصلاح که معادل $(c_m - C_t)$ است را به تولیدکننده پرداخت نماید و تولیدکننده نیز تنها تامین مبلغ C_t را بر عهده دارد. در نتیجه هزینه مورد انتظار تولیدکننده بابت وارانتهی به ازای هر واحد محصول را می‌توان از رابطه ۲ بدست آورد (نصراللهی و اصغری زاده، ۱۳۹۵):

$$E[C_m(W; C_t)] = c_m \left[F(W) - \frac{\mu_W}{W} \right] \quad \text{رابطه ۲}$$

به طوری که داریم $\mu_W = \int_0^W x dF(x)$ و هزینه مورد انتظار خریدار به ازای هر واحد مطابق رابطه ۳ خواهد بود (بلیشکی و مورتی، ۱۹۹۵):

$$E[C_b(W)] = C_w + c_m \left[\frac{\mu_W}{W} - F(W) \right] \quad \text{رابطه ۳}$$

روش شناسی پژوهش

روش تحقیق

استراتژی پژوهشگر برای گردآوری داده‌های مورد نیاز تحقیق و نیز تعیین پیش فرض‌های فلسفی طرح تحقیق را روش تحقیق می‌نامند. روش‌های تحقیق بر اساس دو معیار هدف پژوهش (بنیادی، کاربردی، تحقیق و توسعه) و نحوه گردآوری داده‌ها (توصیفی، غیر آزمایشی) قابل تقسیم بندی هستند (سرمد، بازرگان و حجازی، ۱۳۹۴). با توجه به اینکه موضوع این تحقیق تا کنون مورد مطالعه قرار نگرفته و در این پژوهش به دنبال توسعه مدل‌های موجود هستیم بنابراین این تحقیق از نظر هدف، یک تحقیق بنیادی می‌باشد، و از نظر گردآوری داده‌ها توصیفی است چرا که به توصیف روابط میان متغیرها می‌پردازد. در این پژوهش به دلیل ماهیت پیچیده پدیده مورد مطالعه و ناشناخته بودن این پدیده، ابتدا بر اساس بررسی و مرور مبانی نظری تحقیق، فرآیند مدل سازی برای وارانتهی را مشخص کرده سپس با توجه به مدل‌های مطالعه شده و شرایط حاکم بر مساله مورد بررسی، مدلی جهت دستیابی به هدف تحقیق ارائه می‌شود.

نمادها

$F(x)$: تابع توزیع تجمعی برای اولین زمان شکست؛

$R(x)$: تابع قابلیت اطمینان (احتمال اینکه اولین شکست قبل از x رخ ندهد) برای اولین زمان شکست؛

$f(x)$: تابع چگالی برای اولین زمان شکست؛

λ : پارامتر مقیاس توزیع خرابی محصول؛

β : پارامتر شکل در توزیع وایبول؛

W : طول دوره وارانته؛

n : تعداد شکست‌های محصول؛

C_i : کل هزینه تحمیلی به تولید کننده در هر بار شکست محصول تحت سیاست وارانته تسهیم هزینه؛

f : نرخ افزایشی هزینه‌ها به دلیل تورم یا سایر عوامل؛

d : نرخ بهره؛

I : خالص نرخ نهایی افزایش یا کاهش قیمت‌ها ($d=f-d$)؛

$E[N_m(W)]$: تعداد مورد انتظار شکست‌های هر محصول برای تولید کننده در طول دوره وارانته؛

$U_m(X)$: تابع پیوسته مطلوبیت تولید کننده برای سود Y ؛

$A_m(t)$: نرخ شکست هر محصول با تخمین تولید کننده؛

k : نسبتی از مشتریان که بدون داشتن وارانته برای انجام تعمیرات به تولید کننده مراجعه می‌کنند؛

C_b : هزینه اصلاح (تعمیر) در هر بار خرابی محصول برای خریدار چنانچه محصول دارای وارانته نباشد.

C_m : هزینه اصلاح (تعمیر یا تعویض) در هر بار خرابی برای تولید کننده که هزینه واقعی

اصلاح محصولات تحت پوشش وارانته می‌باشد؛

x : زمان بروز شکست محصول؛

C_W : قیمت وارانتهی که به وسیله تولید کننده در زمان خرید محصول تعیین و پیشنهاد می شود.

پیش فرض ها

کریستوزوف، چاکووا و ماتيو (۲۰۰۹) با ارائه سلسله مراتبی از مدل های ریاضی نشان دادند که چرا هنوز بسیاری از مسایل مهم در تحلیل هزینه های وارانتهی بدون پاسخ مانده اند. طبق این سلسله مراتب مدل سازی ریاضی قراردادهای وارانتهی در پنج سطح انجام می شود و تعدد متغیرها و عوامل موثر بر مدل سازی وارانتهی موجب شده است تا بسیاری از محققان در هنگام مدل سازی مسایل مورد علاقه خود پیش فرض های زیادی را برای ساده سازی و امکان پذیر شدن ارائه و حل مدل در نظر بگیرند (کریستوزوف، چاکووا و ماتيو، ۲۰۰۹). در این پژوهش نیز ناگزیر از در نظر گرفتن پیش فرض هایی هستیم تا بتوانیم از گستردگی و پیچیده شدن بیش از حد مدل مطلوب جلوگیری نماییم. برای طراحی مدل مورد بررسی در این پژوهش مفروضات زیر مد نظر هستند:

- ۱- شکست محصولات مستقل از یکدیگر رخ می دهند؛
- ۲- شکست محصولات تابعی از عمر آنها است.
- ۳- شکست یک محصول منجر به بروز ادعای وارانتهی شده و فرض می کنیم تمام ادعاها نیز صحیح هستند.
- ۴- برای اصلاح محصولات تمام قطعات معیوب با قطعات نو تعویض می شوند.
- ۵- زمان مورد نیاز برای انجام تعویض در مقایسه با میانگین زمان بین شکست ها ناچیز بوده و قابل نادیده گرفتن است.
- ۶- شکست ها در طول دوره وارانتهی در سطح سیستم (محصول) مدل سازی می شوند.
- ۷- هزینه های اصلاح در طول دوره وارانتهی ثابت نیستند و تحت تاثیر نرخ تورم و بهره قرار دارند.

۸- تعمیرات محصولات خراب شده در انحصار تولید کننده نیست و مشتریان می‌توانند به سایر مراکز خدماتی مراجعه کنند. بنابراین مصرف کنندگانی که محصول بدون وارانتی را خریداری می‌نمایند در صورت بروز شکست محصول می‌توانند به مراکز تعمیراتی دیگر مراجعه نمایند و متغیر نسبت مراجعه مشتریان بدون وارانتی به تولید کننده برای عملیات اصلاح نیز در مدل سازی وارد می‌شود.

۹- تولید کننده ریسک‌گریز: تابع مطلوبیت تولید کننده $U_m(Y)$ برای سود Y محدب (ریسک‌گریز) بوده و اکیداً صعودی است تولید کننده سود بیشتر از به سود کمتر ترجیح می‌دهد. بنابراین این تابع از نامعادله جنسن^۱ پیروی می‌کند (زولبک، ۲۰۰۴؛ لی، ۲۰۰۰) که اگر Y میانگین متناهی داشته باشد، آنگاه

$$[y_1 < y_2] \leftrightarrow [U_m(Y_1) < U_m(Y_2)] \text{ و } E[U_m(Y)] < U_m[E(Y)] \quad \text{رابطه ۴}$$

بررسی اثر نرخ تورم و بهره بر هزینه‌های وارانتی

عدم اطمینان‌های مرتبط با شکست‌ها و هزینه‌های محصول با طولانی شدن دوره عمر و دوره وارانتی افزایش می‌یابند و متغیرهایی مانند هزینه‌های نیروی کار، تورم، و کاهش ارزش زمانی پول نیز در دوره‌های وارانتی بلند مدت بر هزینه کل وارانتی تاثیر گذار هستند. با این حال پژوهشگران در بسیاری از مطالعات با هدف پیشگیری از افزایش پیچیدگی‌های مدل، تاثیر نرخ تورم و تنزیل را طول دوره وارانتی نادیده گرفته‌اند. اگرچه این فرض برای محصولاتی با دوره عمر و وارانتی کوتاه (معمولاً کمتر از یک سال) پذیرفتنی است؛ اما برای محصولاتی که دوره وارانتی طولانی تری دارند بهتر است تاثیر نرخ تورم و نیز تغییر ارزش زمانی پول در مدلسازی هزینه‌ها مد نظر قرار گیرد. بنابراین با عدم پذیرش فرض ثابت بودن هزینه در طول دوره وارانتی، می‌توان به جای استفاده از هزینه ثابت C از تابع $C(t)$ استفاده نمود که نشان دهنده هزینه‌های مورد انتظار تحت تاثیر نرخ تورم است.

1- Jensen's Inequality

یکی از پرکاربردترین توابع برای تبدیل هزینه‌های آتی به ارزش فعلی هزینه‌ها، تابع نمایی است که به صورت زیر بیان می‌شود (بلیشکی و مورتی، ۱۹۹۵):

$$C(t) = C.e^{-It} \quad \text{رابطه ۵}$$

در این تابع، I بیانگر نرخ خالص تورم و تنزیل می‌باشد. در نتیجه، با در نظر گرفتن تورم با نرخ f ، عامل تورم زمانی دنباله دار برای دوره زمانی W برابر e^{fW} خواهد بود. بر این اساس اگر قیمت قطعه ای در زمان $W=0$ برابر C باشد، آنگاه در زمان W قیمتی برابر Ce^{fW} خواهد داشت (سارکر، جمال و وانگ، ۲۰۰۰).

برای نرخ بهره d (که بیانگر ارزش زمانی پول است) عامل ارزش فعلی پول در زمان W برابر e^{-dW} است. از این رو ارزش فعلی محاسبه شده با تورم Ce^{fW} (عامل تورم خالص) به وسیله $Ce^{fW} e^{-dW}$ بیان خواهد شد. برای محصولی با قیمت اولیه C (واحد محصول/واحد پول) ارزش فعلی قیمت تورمی در زمان $W=0$ که با C_0 نشان داده می‌شود برابر است با (نصراللهی و اصغری زاده، ۱۳۹۵):

$$C_0 = Ce^{(f-d)W} = Ce^{IW}, \quad I = f - d \quad \text{رابطه ۶}$$

که در این رابطه C در طول دوره W دچار تورم شده و به Ce^{fW} تبدیل شده است و در ضمن e^{-dW} نیز عامل تنزیل بوده که ارزش آتی محصول را به ارزش فعلی آن تبدیل می‌کند. در نتیجه I بیانگر ارزش فعلی نرخ تورم می‌باشد (سارکر و همکاران، ۲۰۰۰؛ گیری و باردهان، ۲۰۱۱؛ پندی و گوپتا، ۲۰۱۱).

حال اگر تعداد شکست‌های مورد انتظار در سال i و نیز هزینه مورد انتظار هر شکست در سال i را نیز به ترتیب با $E(Ni)$ و $E(Ci)$ نشان دهیم، آنگاه ارزش فعلی کل هزینه مورد انتظار برای وارانتهی را می‌توان با رابطه ۷ نشان داد:

$$E(C) = \sum_{i=1}^W E(N_i) E(C_i) e^{Ii} \quad \text{رابطه ۷}$$

که این هزینه بر اساس سیاست PRW میان تولید کننده و مشتری تقسیم خواهد شد (نصراللهی و اصغری زاده، ۱۳۹۵).

مدل ریاضی تعیین قیمت وارانتهی

کل سود مورد انتظار تولید کننده برای وارانتهی در طول دوره وارانتهی و نیز اصلاح محصول بدون وارانتهی را می توان به شکل رابطه ۸ بیان کرد:

$$\begin{aligned} E[\Pi(W)] &= p[C_W - E[N(W)]e^{IW}c_t] \\ &\quad + (1-p)k[E[N(W)]e^{IW}c_b - E[N(W)]e^{IW}c_m] \quad \text{رابطه ۸} \\ \Rightarrow E[\Pi(W)] &= p(C_W - e^{IW}E[N(W)]c_t) \\ &\quad + (1-p)kE[N(W)]e^{IW} \cdot [c_b - c_m] \end{aligned}$$

تولید کننده تعداد شکست های مورد انتظار خود، $N(W)$ ، در طول دوره وارانتهی را بر اساس $\Lambda_m(x)$ برآورد می نماید. تعداد شکست ها در طول دوره وارانتهی تابعی از W و یک متغیر تصادفی است. فرض کنیم n_m^* تعداد شکست های مورد انتظار تولید کننده در هنگامی باشد که تولید کننده میان سود ناشی از پیشنهاد وارانتهی و سود ناشی از محصول بدون وارانتهی بر اساس مطلوبیت مورد انتظار بی تفاوت است. کل سود مورد انتظار تولید کننده در هنگامی که محصول با وارانتهی به فروش می رود برابر است با:

$$C_W - e^{IW}E[N(W)]c_t + (1-p)kE[N(W)]e^{IW} \cdot [c_b - c_m] \quad \text{رابطه ۹}$$

و در این صورت سود تولید کننده در هنگامی که محصولش وارانتهی ندارد از درآمدهای ناشی از اصلاح محصول معیوب شده (فقط درصدی از محصولات معیوب که جهت اصلاح به تولید کننده باز گردانده می شوند) بدست می آید که برابر است با:

$$ke^{IW} \cdot [c_b - c_m]n_m^* \quad \text{رابطه ۱۰}$$

حال برای تولید کننده ریسک گریزی که تابع مطلوبیتش افزایشی $U_m(Y)$ است، معادل قطعی سود را می توان از طریق رابطه ۱۱ بدست آورد:

$$\begin{aligned} &U_m[pC_W - pN(W)e^{IW}c_t + (1-p)kN(W)e^{IW}(c_b - c_m)] \\ &= E[U_m ke^{IW} \cdot (c_b - c_m)n_m^*] \times P[N_m(W) = n_m^*] \quad \text{رابطه ۱۱} \end{aligned}$$

از آنجایی که نرخ شکست تخمینی تولید کننده وابسته به زمان است، بنابراین می توان بصورت فرایند ناهمگن پواسان ($NHPP$) مدل سازی کرد که تابع نرخ شکستش به صورت زیر بیان می شود:

$$\Lambda_m(x) = \lambda_m \beta_m(x)^{(\beta_m-1)} \quad \text{رابطه ۱۲}$$

این رابطه تابعی افزایشی از x است. متذکر می شویم که این رابطه به نرخ شکست با توزیع وایبول دو پارامتری با $\beta_m > 1$ و $\lambda_m > 0$ مربوط می شود.

با توجه به اینکه محصولات مشابه هستند بنابراین با داشتن اطلاعات بیشتر در خصوص شکست محصول، تولید کننده می تواند احتمال بروز n_m شکست در طول دوره وارانتهی برای هر یک از محصولات را طبق روابط زیر برآورد نماید:

$$Prob[N_m(W) = n_m] = \frac{\left\{ \int_0^W \Lambda_m(x) dx \right\}^{n_m} \cdot e^{-\int_0^W \Lambda_m(x) dx}}{n_m^*!} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

$$E[N_m(W)] = \lambda_m^{\beta_m} (W^{\beta_m}) \quad \text{رابطه ۱۴}$$

ریسک گریزی تولید کننده به صورت توابع مطلوبیت نمایی فرض می شود که در رابطه ۱۵ مشخص است:

$$U_m(Y) = e^{-r_m Y} \quad \text{و} \quad r_m > 0 \quad \text{رابطه ۱۵}$$

که در این رابطه r_m به عنوان پارامتر ریسک بیانگر ترجیحات ریسک تولید کننده است. $r_m > 0$ نشان دهنده تولید کننده ریسک گریز بوده و $r_m < 0$ نشان دهنده تولید کننده ریسک پذیر است و نهایتاً $r_m = 0$ نیز تولید کننده با ریسک خنثی را نشان می دهد. در توابع مطلوبیت نمایی، معیار ریسک گریزی مطلق^۱ برای تمام Y ها ثابت است. بدین معنی که تابع نمایی فقط ریسک گریزی ثابت را نشان می دهد. دلیل در نظر گرفتن ریسک گریزی ثابت

1- absolute risk aversion measure

این است که بکارگیری توابعی که نمایانگر ریسک گریزی افزایشی تولید کننده و یا ریسک گریزی کاهشی تولید کننده (یا بالعکس) باشند موجب افزایش پیچیدگی های محاسباتی خواهد شد، اما پاسخ های بدست آمده در این حالت با پاسخ های ناشی از بکارگیری ریسک گریزی ثابت بسیار مشابه خواهد بود (موسکوویتز و پلانت، ۱۹۸۴).

سود تولید کننده برای محصول بدون وارانته از رابطه $[c_b - k[N(W)]e^{IW}]$ بدست می آید. مطلوبیت سود مورد انتظار برای استراتژی های با وارانته و بدون وارانته و نقطه بی تفاوتی تصمیم تولید کننده در رابطه ۱۶ آمده است.

$$e^{-r_m} [p(c_W - (\lambda_m W)^{\beta_m} e^{IW} c_t) + (1-p)k(\lambda_m W)^{\beta_m} e^{IW} (c_b - c_m)]$$

$$= \sum_{n_m=0}^{\infty} e^{-r_m} e^{IW(c_b - c_m)kn_m} \cdot \frac{\left\{ \int_0^W \lambda_m \beta_m x^{\beta_m - 1} \right\}^{n_m^*} \cdot e^{-\int_0^W \lambda_m \beta_m x^{\beta_m - 1}}}{n_m^*!} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

اگر تفاوت میان هزینه های خریدار با تولید کننده برای اصلاح در هر بار شکست محصول $(c_b - c_m)$ را با c و نیز نسبت محصولات خریداری شده بدون وارانته $(1-p)$ را با q نشان دهیم؛ در ضمن چنانچه شکست ها از فرایند ناهمگن پواسان پیروی کنند و از دو طرف معادله ۱۵ لگاریتم معکوس بگیریم، آنگاه می توان رابطه ۱۵ را بر اساس ۱۶ مجدداً بازنویسی نمود و بنابراین رابطه جدید ۱۶ به شکل زیر حاصل می شود:

$$-r_m [p(c_W - (\lambda_m W)^{\beta_m} e^{IW} c_t) + qk(\lambda_m W)^{\beta_m} e^{IW} c]$$

$$= \ln \sum_{n_m=0}^{\infty} e^{-r_m e^{IW} ckn_m} \cdot \frac{[(\lambda_m W)^{\beta_m}]^{n_m^*} \cdot e^{-(\lambda_m W)^{\beta_m}}}{n_m^*!} \quad \text{رابطه ۱۷}$$

در نهایت رابطه ۱۷ به شکل زیر بسط داده می شود:

$$C_W = \frac{-1}{r_m p} \ln \sum_{n_m=0}^{\infty} e^{-r_m e^{IW} ckn_m} \cdot \frac{[(\lambda_m W)^{\beta_m}]^{n_m^*} \cdot e^{-(\lambda_m W)^{\beta_m}}}{n_m^*!} \quad \text{رابطه ۱۸}$$

$$+ [(c_W - (\lambda_m W)^{\beta_m} e^{IW} c_t) - q/p [k(\lambda_m W)^{\beta_m} e^{IW} c]]$$

اعتبار سنجی مدل

در این قسمت تجزیه و تحلیل قیمت بهینه وارانتهی توسط تولید کننده با توجه به ترجیحات ریسک تولید کننده، پارامترهای شکست، طول دوره وارانتهی، و نرخ تورم و تنزیل ارائه می شود. برای تمام موارد ذیل فرض می شود که $\lambda_m = 0.8$ محصولات با وارانتهی به فروش می روند و 20% نیز بدون وارانتهی هستند. بنابراین داریم: $p = 0.8$ و $q = 0.2$. در ضمن نرخ تورم برابر 30% و نرخ بهره نیز برابر 20% در نظر گرفته می شود و فرض می کنیم پارامترهای فرایند ناهمگن پواسان برای تولید کننده $\lambda_m = 0.325$ و $\beta_b = 2$ است (این مقدار نشان می دهد که نرخ شکست با گذشت زمان افزایش می یابد). هزینه هر بار تعمیر محصول معیوب برای خریدار $r_b = 30$ و هزینه واقعی تولید کننده برای هر بار تعمیر $r_m = 20$ بوده و نرخ بازگشت مشتریان بدون وارانتهی برای اصلاح محصول برابر $k = 0.1$ است.

تأثیر ترجیحات ریسک تولید کننده بر قیمت وارانتهی

در اینجا پارامتر ریسک گریزی تولید کننده در بر گیرنده طیف وسیعی از ترجیحات ریسک وی از 0.05 تا 1 می باشد. با افزایش پارامتر ریسک r_m ، تولید کننده ریسک گریز تر می شود و چنانچه $r_m = 0$ باشد تولید کننده ریسک خنثی است.

با اجرای مدل، جدول ۱ بدست می آید که نشان دهنده قیمت بهینه وارانتهی برای تولید کننده بر اساس تغییرات پارامتر ریسک گریزی می باشد. به وضوح مشخص است که قیمت وارانتهی همزمان با افزایش میزان ریسک گریزی تولید کننده افزایش می یابد و در صورت کاهش ریسک گریزی تولید کننده قیمت وارانتهی نیز کاهش خواهد یافت. بنابراین هر چه تولید کننده ریسک گریز تر باشد قیمت بالاتری را برای وارانتهی به خریدار پیشنهاد می دهد تا ریسک زیان را حداقل نماید.

جدول ۱- قیمت وارانتهی برای مقادیر متفاوت ریسک گریزی تولید کننده

r_m	۰,۰۵	۰,۲۵	۰,۵۰	۰,۷۵	۰,۹۵
C_w	۲۱,۴۵	۲۱,۶۹	۲۲,۱۹	۲۳,۵۳	۳۳,۴۳

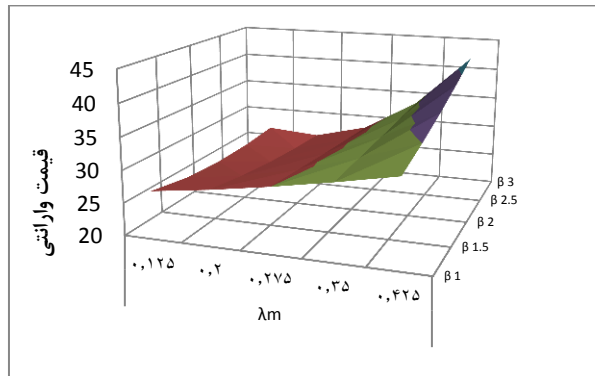
تاثیر پارامترهای شکست بر قیمت وارانتهی

در این قسمت مقادیر متفاوت برای نرخ شکست و پارامتر شکل در نظر گرفته می‌شود تا تاثیر آنها بر قیمت پیشنهادی وارانتهی مشاهده شود. برای بررسی این موضوع مقدار λ_m بین ۰/۲ تا ۰/۴ و مقدار β_m نیز در دامنه ۱ تا ۳/۵ تغییر می‌کند. مقدار پارامتر ریسک تولید کننده برابر $r_m=0.5$ خواهد بود. جدول ۲ حاصل اجرای مدل به ازای مقادیر مختلف است.

جدول ۲- قیمت وارانتهی برای نرخ شکست و پارامتر شکل متفاوت

		β_m				
		۱	۱,۵	۲	۲,۵	۳
λ_m	۰,۲۰۰	۲۷,۳۶	۲۶,۲۰	۲۵,۷۳	۲۵,۸۰	۲۶,۲۹
	۰,۲۵۰	۲۸,۵۴	۲۷,۴۰	۲۶,۵۷	۲۵,۹۹	۲۵,۶۳
	۰,۳۰۰	۲۹,۹۶	۲۹,۳۶	۲۸,۸۲	۲۸,۳۲	۲۷,۸۷
	۰,۳۵۰	۳۱,۵۷	۳۱,۹۳	۳۲,۳۱	۳۲,۷۰	۳۳,۱۰
	۰,۴۰۰	۳۳,۳۴	۳۵,۰۳	۳۶,۹۵	۳۹,۱۱	۴۱,۵۵

شکل ۱ را می‌توان بر اساس جدول ۲ ترسیم نمود. با توجه به شکل کاملاً مشخص است که قیمت پیشنهادی وارانتهی توسط تولید کننده متناسب با افزایش نرخ شکست (λ_m) و پارامتر شکل (β_m) افزایش می‌یابد. در $\beta_m=1$ که بیانگر توزیع ثابت شکست است، قیمت وارانتهی با افزایش نرخ شکست به آهستگی زیاد می‌شود در حالی که در $\beta_m=3$ قیمت وارانتهی به سرعت زیاد می‌شود. دلیل چنین رفتاری این است که با داشتن نرخ شکست ثابت، افزایش عمر تاثیری بر بروز شکست ندارد اما برای β_m بالاتر افزایش عمر محصول بر قیمت وارانتهی از دیدگاه تولید کننده تاثیر می‌گذارد.



شکل ۱- تاثیر پارامترهای شکست بر قیمت وارانتهی تولید کننده

تاثیر طول دوره وارانتهی بر قیمت وارانتهی

در این بخش از تجزیه و تحلیل، دامنه ای طول دوره وارانتهی در نظر گرفته می شود تا تاثیر آن بر روی قیمت بهینه وارانتهی مشاهده شود. برای انجام این تحلیل مقدار W بین ۲ تا ۴ سال متغیر خواهد بود. با در نظر گرفتن $r_m = 0.5$ ، قیمت بهینه وارانتهی برای تولید کننده در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳- تاثیر طول دوره وارانتهی بر قیمت وارانتهی تولید کننده

W	۲	۲,۵	۳	۳,۵	۴
C_w	۱۲,۴۹	۱۶,۵۶	۲۲,۱۹	۲۹,۷۸	۳۹,۳۰

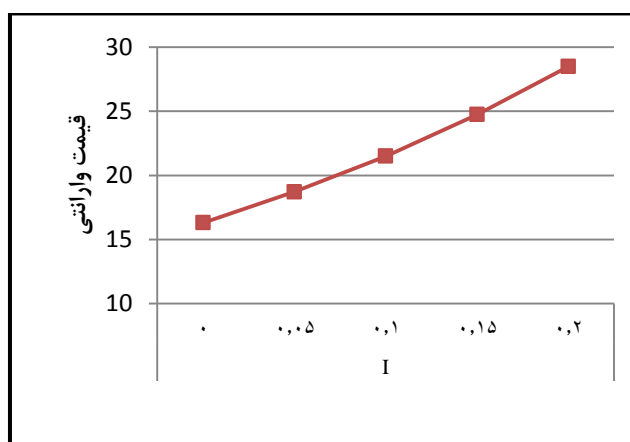
تاثیر نرخ تورم و تنزیل بر قیمت وارانتهی

وارد نمودن نرخ تورم و تنزیل علاوه بر افزایش پیچیدگی های مدل موجب می شود تا ارزش فعلی کل هزینه مورد انتظار برای وارانتهی برای دوره های طولانی (معمولاً بیشتر از یک سال) محاسبه شود. تغییر نرخ تورم و بهره و در نتیجه تغییر عامل ارزش فعلی هزینه ها قیمت پیشنهادی وارانتهی تولید کننده را تغییر خواهد داد. در جدول ۴ تاثیر عامل ارزش فعلی هزینه های وارانتهی بر روی میزان قیمت پیشنهادی وارانتهی نشان داده شده است.

جدول ۴- تاثیر نرخ ارزش فعلی هزینه‌ها بر قیمت وارانتی

I	۰	۰,۰۵	۰,۱	۰,۱۵	۰,۲
C_w	۱۶,۳۰	۱۸,۷۱	۲۲,۱۹	۲۴,۷۴	۲۸,۴۹

شکل ۲ نیز تاثیر نرخ خالص ارزش فعلی هزینه‌های اصلاح محصول را برای تعداد شکست‌های مورد انتظار متفاوت نشان می‌دهد. همان طور که در جدول ۳ و شکل ۲ مشخص است با افزایش نرخ تورم قیمت بیشتری برای وارانتی محصول تعیین می‌شود.



شکل ۲- اثر نرخ تورم و تنزیل بر قیمت وارانتی

نتیجه گیری و پیشنهادها

در این مطالعه با در نظر گرفتن تاثیر ریسک گریزی تولیدکنندگان بر سطح قیمت وارانتی، مدل قیمت وارانتی PRW برای محصولات PRW که دارای نرخ شکست وابسته به زمان هستند طراحی گردید. در مدل پیشنهادی با بکارگیری تابع مطلوبیت تولیدکننده برای سود ترجیحات ریسک وی در نظر گرفته شد. پس از ارائه مدل از یک مثال عددی برای اعتبار سنجی استفاده شد. تحلیل مدل نشان می‌دهد که هرچه تولیدکننده ریسک گریزتر باشد، قیمت بیشتری برای وارانتی تعیین می‌کند. تاثیر نرخ خالص ارزش فعلی هزینه‌های اصلاح بر روی قیمت پیشنهادی

وارانتهی نیز مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل از تحلیل مدل نشان می‌دهد هر چه نرخ تورم بیشتر باشد تولید کننده قیمت بالاتری را برای وارانتهی محصول تعیین می‌کند. این مدل می‌تواند در هنگام تصمیم‌گیری تولید کنندگان برای تعیین قیمت وارانتهی مفید باشد. در مطالعات آتی پژوهشگران می‌توانند تاثیر بکارگیری انواع متفاوت توابع توزیع شکست را بر روی مدل بررسی کنند. به علاوه در مطالعه حاضر، نقش رقبا و نحوه قیمت گذاری آنها بر روی قیمت محصولات و وارانتهی نادیده گرفته شده است. البته همان طور که پیش تر اشاره شد، به دلیل ویژگی‌های بازارهای امروزی و مشابه بودن محصولات، ویژگی‌های جانبی محصول مانند قیمت وارانتهی، خدمات پس از فروش، و ... در انتخاب محصول نقش بسزایی دارند و بنابراین تولید کنندگان در هنگام تعیین قیمت نهایی محصول (که شامل قیمت وارانتهی نیز می‌باشد) می‌بایست سیاست‌های رقبا و قیمت‌های آنان را نیز در نظر بگیرند. لذا پیشنهاد می‌شود در مطالعات بعدی علاوه بر متغیرهای موجود نقش سیاست‌های رقبا نیز به صورت یک متغیر تصمیم در نظر گرفته شود و یا به صورت یک رویکرد نظریه بازی برای تعیین قیمت بهینه وارانتهی ارائه گردد.

منابع

- سرمد، ز.، بازرگان، ع.، حجازی، ا. (۱۳۹۴). روش‌های تحقیق در علوم رفتاری. نشر آگه (چاپ ۲۸)، تهران.
- نصراللهی، م.، اصغری زاده، ع.، جعفر نژاد، ا.، و صنیعی منفرد، م.ع. (۱۳۹۳). توسعه سیاست جدید وارانتهی PRW برای برآورد هزینه‌ها. مدیریت صنعتی ۶(۱): ۱۲۷-۱۴۰.
- نصراللهی، م.، اصغری زاده، ع. (۱۳۹۵). مدل تعیین قیمت وارانتهی PRW با خریداران ریسک‌گریز. پژوهش‌های مدیریت در ایران ۲۰(۱): ۱۳۱-۱۵۴.
- Blischke, W.R. & Murthy, D.N.P. (1992). Product warranty management I: Taxonomy for warranty policies. *European Journal of Operational Research* 62, 127-148.
- Blischke, W.R. & Murthy, D.N.P. (1995), *Product Warranty Handbook*, Marcel Dekker, Inc. New York.
- Boom, A. (1998). Product risk sharing by warranties in a monopoly market with risk-averse consumers. *Journal of Economic Behavior & Organization* 33, 241-257.
- Chirstozov, D., Chukova, S. & Mateev, P. (2009). On two types of warranties: warranty of malfunctioning and warranty of misinforming. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 26(3), 399-420.
- Chun, Y.H. & Tang, K. (1995). Determining the optimal warranty price based on the producer's and customers' risk preferences. *European Journal of Operational Research* 85, 97-110.
- Eshraghnia Jahromi, A. & Vahdani, H. (2009). Replacement-Repair Policy Based on a Simulation Model for Multi-State Deteriorating Products Under Warranty. *Transaction E: Industrial Engineering* 16(1), 26-35.
- Giri, B.C. & Bardhan, S. (2011). Coordinating a two-echelon supply chain under inflation and time value of money. *International Journal of Industrial Engineering Computations* 2. 811-818.
- Huang, H.Z., Liu, Z.J., Li, Y., Liu, Y. & He, L. (2008). A warranty cost model with intermittent and heterogeneous usage. *Maintenance and reliability* 4, 9-15.
- Jung, K.M., Park, M, & Park, D.H. (2015). Cost optimization model following extended renewing two-phase Warranty, *Computers & Industrial Engineering* 79, 188-194.

- Li, Y.K. (2000), *Jensen's Inequality*, *Mathematical Excalibur* 5(4), 1-4.
- Moskowitz, H. & Plante, R. (1984). *Effect of Risk Aversion on Single Sample Attribute Inspection Plans*. *Management Science*, 30(10), 1226-1237.
- Murthy, D.N.P. & Blischke, W.R. (1992), *Product warranty and management II: An integrated framework for study*. *European Journal of Operational Research* 62, 261-281.
- Murthy, D. N. P., & Djamaludin, I. (2002). *New product warranty: A literature review*. *International Journal of Production Economics*, 79, 231-260.
- Padmanabhan, V. & Rao, R.C. (1993). *Warranty policy and extended service contracts: Theory and an application to automobiles*. *Marketing Science* 12(3), 230-247.
- Pandey, R.K. & Gupta, S. (2011). *Supply Chain Inventory Model with Time Dependent Demand for Decaying Items under Inflation*. *International Transactions in Applied Sciences* 3(1), 122-130.
- Park, M. & Pham, H. (2016). *Cost models for age replacement policies and block replacement policies under warranty*, *Applied Mathematical Modelling* 40, 5689-5702.
- Popovic, V., Stamenkovic, D. & Rakicevic, B. (2012). *Choosing the Right Warranty Policy – from the Customer's to the Manufacturer's Point of View*. *International Journal of Applied Physics and Mathematics* 2(5), 333-335.
- Rahman, A & Chattopadhyay, G. (2010). *Modeling risks to manufacturer and buyer for lifetime warranty policies*. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 5(3), 203-209.
- Ritchken, P.H. & Tapiero, C.S. (1986) *Warranty design under buyer and seller risk aversion*, *Naval Research Logistics Quarterly* 33, 657-671.
- Sarker, B.R., Jamal, A.M.M. & Wang, S., (2000), *Supply chain models for perishable products under inflation and permissible delay in payment*, *Computers & Operations Research* 27, 59-75
- Stamenković, D., Popović, V., Spasojević-Brkić, V. & Radivojević, J. (2011). *Combination free replacement and pro-rata warranty policy optimization model*. *Journal of Applied Engineering Science* 9(4), 457-464.

Thomas, M.U. (2010). *Warranty Modeling*. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, edited by James J. Cochran. John Wiley & Sons, Inc.

Thomas, M.U. & Rao, S.S (1999). *Warranty economic decision models: A summary and some suggested directions for future research*. Operations research 47(6), 807-820.

Wang, Y., Liu, Z. & Liu, Y. (2015). *Optimal preventive maintenance strategy for repairable items under two-dimensional warranty*, Reliability Engineering and System Safety 142, 326-333.

Yang, D., He, Z. & He, S. (2016). *Warranty claims forecasting based on a general imperfect repair model considering usage rate*, Reliability Engineering and System Safety 145, 147-154.

Yeh, C.W. & Fang, C.C., (2014) *Optimal pro-rata warranty decision with consideration of the marketing strategy under insufficient historical reliability data*, International Journal of Advanced Manufacturing and Technology 71,1757-1772.

Zhou, Z., Li, Y. & Tang, K. (2009). *Dynamic pricing and warranty policies for products with fixed lifetime*. European Journal of Operational Research 196, 940-948.

Zolbec, S. (2004). *Jensen's Inequality for Nonconvex Functions*, Mathematical Communications 9, 119-124.