فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال یازدهم، شماره ۲۹، تابستان ۹۲
صفحات ۲۱ تا ۳۹

مدل برنامه‌ریزی غیرخطی مبتنی‌بر TOPSIS برای محاسبهٔ اوزان ایده‌آل شاخص‌های تصمیم‌گیری

سید حسین رضوی حاجی‌آقا*
حنان عموزاد مهدیرجی **
هادی اکرمی***
شیده‌سادات هاشمی****

چکیده

توسعهٔ روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره به‌منظور امکان بهره‌گیری از چندین معیار سنجش در مسائل تصمیم‌گیری بوده‌است. اصولاً مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه با انتخاب بهترین گزینه از میان تعدادی گزینهٔ موجود و برحسب تعدادی شاخص ارتباط دارد. یکی از مسائل اساسی در این خصوص، تعیین اوزان اهمیت شاخص‌های تصمیم‌گیری است. روش‌های گوناگونی نظیر «آنتروپی»، «LINMAP» و روش «ساتی» برای تعیین اوزان اهمیت شاخص‌ها ارائه شده است. در این مقاله، مدلی غیرخطی به‌منظور برآورد اوزان ایده‌آل براساس منطق روش «TOPSI» پیشنهاد شده‌است. از مزایای این روش می‌توان به سادگی و کاهش میزان اطلاعات مورد نیاز دریافتی از تصمیم‌گیرنده در فرایند ارزیابی و امکان لحاظ نظرات او درخصوص ترجیح شاخص‌ها بر یکدیگر اشاره نمود. کاربرد روش پیشنهادی در دو مثال بررسی شده است.

واژگان کلیدی: تصمیم‌گیری چندشاخصه، بردار ایده‌آل‌منفی، بردار ایده‌آل مثبت، TOPSIS، برنامه‌ریزی غیرخطی.

---

* عضو هیئت علمی موسسه مطالعات و پژوهش‌های بازرگانی، تهران، ایران (نویسنده مسئول) sh.razavi@st.atu.ac.ir
** عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی کاشان، ایران
*** مؤسسه مطالعات و پژوهش‌های بازرگانی، تهران، ایران
**** کارشناس ارشد مدیریت صنعتی، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۹۰/۱۲/۱٤ تاریخ پذیرش: ۹۱/۱۲/۱۳

مقدمه

انسان از دیرباز در شرایط مختلف برای انتخاب راهکارهای موجود، مجبور به اتخاذ تصمیم بوده است. با گسترش جوامع و افزایش تنوع نیازهای بشر، پیچیدگی در فرایند تصمیم‌گیری نیز افزایش یافته است. این پیچیدگی برای مدیران سازمان‌ها نیز از تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان به سمت تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی و عدم‌اطمینان کامل تغییر یافته است. از سوی دیگر، تنوع و اولویت‌های مختلف اهداف تصمیم نیز بر پیچیدگی این فرایند می‌افزاید. براین‌اساس اندیشمندان نسبت به ارائهٔ رویه‌های علمی و نظام‌مند برای بررسی گزینه‌های هدف و فرایند اخذ تصمیم اقدام نموده‌اند. در نتیجه، روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره، به‌عنوان یکی از شاخه‌های کاربردی دانش تحقیق در عملیات، به‌وجود آمدند که تحولی در این فرایند به‌شمار می‌رود. پس از دههٔ ۱۹۶۰ هزاران مقاله و کتاب دربارهٔ مبانی نظری و کاربردی این شاخه ارائه شده است. هدف از روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره را می‌توان به شرح زیر برشمرد: «تجزیه‌وتحلیل تصمیم، مجموعه فعالیت‌هایی است که از طریق برخی مدل‌های صریح و نه لزوماً رسمی، سعی در ارائهٔ پاسخ به ذی‌نفعانی دارد که قصد اتخاذ تصمیم در زمینه‌ای خاص را دارند»[۱۰]. در واقع، توسعهٔ روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره به‌منظور امکان بهره‌گیری از چندین معیار سنجش در مسائل تصمیم‌گیری است.

روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره به دو دستهٔ روش‌های تصمیم‌گیری چندهدفه و روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه تقسیم می‌شوند [۹]. در دهه‌های گذشته تصمیم‌گیری چندشاخصه ازجمله حوزه‌هایی بوده که با سرعت زیاد و در جهت‌های گوناگون در حال رشد و توسعه است.

در تصمیم‌گیری چندشاخصه، تعدادی گزینه تصمیم‌گیری بر اساس تعدادی شاخص ارزیابی‌شده و بهترین گزینه انتخاب می‌شود [۳۰]. در این مسائل جواب بهینه، گزینه‌ای است که بهترین مقدار را در هر یک از شاخص‌های مورد ارزیابی کسب می‌کند. چنین گزینه‌ای معمولاً وجود ندارد و ازاین‌رو هدف یافتن بهترین جواب سازشی (توافقی) از میان کلیهٔ گزینه‌های ممکن بر اساس چندین شاخص کمّی و کیفی است [۱۵]. گام‌های اصلی در یک مسألهٔ تصمیم‌گیری چندشاخصه را می‌توان به شرح

زیر برشمرد [۱۳]:

۱. تعیین معیارهای ارزیابی به‌گونه‌ای که منعکس‌کنندهٔ اهداف باشند؛
۲. شناسایی گزینه‌های موردنظر به‌منظور مقایسه؛
۳. ارزیابی گزینه‌های موردنظر نسبت به معیارها (مقادیر تابع ملاک)؛
۴. به‌کارگیری یک شیوهٔ تجزیه و تحلیل چند معیارهٔ رسمی؛
۵. پذیرش یک گزینه به‌عنوان بهینه (ارجح)؛
۶. اگر گزینهٔ نهایی قابل قبول نیست، اطلاعات جدیدی را جمع‌آوری و به گام بعدی بهینه‌سازی چندمعیاره بروید.

گام‌های فوق، برای هر مسألهٔ چندشاخصه قابل استفاده است. در گام چهارم از این فرایند تصمیم‌گیرنده می‌تواند بر اساس شرایط مساله و نوع اطلاعات در دسترس یکی از انواع روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه را انتخاب کند. مروری جامع بر روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه را می‌توان در منابع [۱۰، ۱۲، ۲۳] ملاحظه نمود.

هدف از تحقیق حاضر آن است که با در نظر داشتن محدودیتهای موجود، روشی نوین به‌منظور محاسبهٔ اوزان بهینه شاخص‌های (معیارهای) موردنظر در ارزیابی گزینه‌های یک مسألهٔ تصمیم‌گیری چندشاخصه ارائه گردد. این روش در واقع تعمیمی بر منطق مورد استفاده در "روش برنامه‌ریزی خطی برای تحلیل چندبعدی ترجیحات[1]" (LINMAP) است که برخی محدودیت‌های منطقی و کاربردی آن را رفع و از منطقی ساده برای محاسبهٔ اوزان استفاده می‌کند. کاربرد این روش، در کنار روش (TOPSIS) به نوعی تصمیم‌گیرنده را در اتخاذ تصمیم بهینه کمک می‌کند. در ادامهٔ مقاله نخست، مروری بر سابقهٔ توسعه و کاربرد مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه ارائه شده‌است. منطق مورد استفاده در مدل‌سازی روش پیشنهادی و برخی نتایج مربوطه در بخش سوم ارائه و اثبات شده‌است. برای بررسی کاربرد مدل پیشنهادی نیز دو مثال عددی در بخش چهارم مقاله ارائه گردیده است. در نهایت مقاله با بحث و نتیجه‌گیری در بخش پنجم به پایان می‌رسد.

1- Linear programming techniques for multidimensional analysis of preference

کاربرد مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در تصمیم‌گیری چندشاخصه

یک مسألهٔ تصمیم‌گیری چندشاخصه را می‌توان به شکل رسمی به‌صورت زیر تعریف نمود: مجموعه‌ای از m گزینه $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ را در نظر بگیرید که براساس مجموعه‌ای از معیارهای $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ ارزیابی می‌شوند. مسأله را می‌توان در یک ماتریس تصمیم‌گیری، نظیر شکل ۱ تعریف نمود.

شاخص / گزینه	C_1	C_2	...	C_n
A_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}
A_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
A_m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mn}

شکل ۱. ماتریس تصمیم‌گیری

در ماتریس شکل ۱، عناصر y_{ij} امتیاز گزینه iام در شاخص jام را نشان می‌دهند. هر یک از معیارهای $c_j, j = 1,2,\ldots,n$ نیز وزنی معادل $w_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$ در تصمیم‌گیری دارند.

چارچوب‌های مختلفی برای تجزیه‌وتحلیل مسائل تصمیم‌گیری طبق تعریف فوق ارائه شده‌است. "هوانگ" و "یون" [۱۲] در یک تقسیم‌بندی کلی انواع روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه را به دو دستهٔ روش‌های غیرجبرانی و جبرانی تقسیم می‌کنند. بر این اساس، در خانوادهٔ روش‌های غیرجبرانی، امکان مبادله میان شاخص‌های مسألهٔ وجود ندارد. در حالی که خانوادهٔ روش‌های جبرانی، امکان مبادله میان شاخص‌ها را فراهم می‌سازند. این مؤلفان انواع روش‌های جبرانی را در سه دستهٔ زیر تقسیم‌بندی می‌کنند.

زیرگروه نمره‌گذاری و امتیازدهی: در این زیرگروه، سعی بر برآورد یک تابع مطلوبیت به ازای هر گزینه می‌باشد از آنجایی‌که گزینه با بیشترین مطلوبیت برگزیده خواهد شد. از این دسته می‌توان به روش‌های مجموع ساده وزین، ساده وزین با تعامل

متقابل و مجموع وزین رده‌ای اشاره نمود؛
زیر گروه سازشی: گزینه‌ای در این روش‌ها ارجح خواهد بود که نزدیک‌ترین گزینه به راه‌حل ایده‌آل باشد. از این زیرگروه می‌توان به روش‌های رتبه‌بندی گزینه‌ها بر اساس نزدیکی به راه‌حل ایده‌آل (TOPSIS)، (LINMAP) و ... اشاره نمود.
زیرگروه هماهنگ: خروجی این زیرگروه به‌صورت مجموعه‌ای از رتبه‌ها بوده، به‌نحوی که هماهنگی لازم را به مناسب‌ترین صورت تأمین خواهد نمود. از این زیرگروه می‌توان به روش‌های تخصیص خطی، ELECTRE و PROMETHEE اشاره نمود[۱].
روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه را می‌توان از منظر دیگری نیز تقسیم‌بندی نمود. در زمینهٔ روش‌های تصمیم‌گیری چندهدفه، انواع روش‌های تصمیم‌گیری را بر حسب زمان و نحوهٔ مشارکت تصمیم‌گیرنده در حل مسأله به چهار دستهٔ روش‌های حل (۱) با گرفتن اطلاعات اولیه از تصمیم‌گیرنده، (۲) با گرفتن اطلاعات از تصمیم‌گیرنده هنگام حل، (۳) با گرفتن اطلاعات از تصمیم‌گیرنده بعد از حل و (۴) بدون نیاز به کسب اطلاعات از تصمیم‌گیرنده تقسیم می‌کنند1[، .]3 تقسیم‌بندی مشابهی را می‌توان برای روش‌های تصمیم‌گیرنده چندشاخصه نیز ارائه نمود .برخی از این روش‌ها مسأله تصمیم‌گیری را در حالتی تعاملی و با مشارکت تصمیم‌گیرنده در فرایند تجزیه‌وتحلیل حل می‌کنند. از جمله روش‌های این دسته می‌توان به فرایند تحلیل سلسله مراتبی، روش (PROMETHEE) و (ELECTRE) اشاره نمود که در طول فرایند تجزیه‌وتحلیل اطلاعاتی را به تناسب از تصمیم‌گیرنده دریافت می‌دارند .در مقابل، دستهٔ دیگری از روش‌ها با دریافت مجموعه‌ای از اطلاعات اولیه از تصمیم‌گیرنده در قالب قضاوت‌ها و ترجیحات انفرادی به تجزیه‌وتحلیل مسأله می‌پردازند که ازآن جمله می‌توان به روش‌های (TOPSIS) ، (COPRAS) و مجموع ساده وزنی اشاره نمود.

یکی از رویکردهای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه، فرمول‌بندی آن‌ها در قالب مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی است. در این رویکرد سعی می‌شود تا با استفاده از مدلی ریاضی، اوزان شاخص‌های تصمیم‌گیری و یا رتبه‌بندی گزینه‌ها مشخص شود. یکی از اولین روش‌های مبتنی‌بر برنامه‌ریزی ریاضی، روش (LINMAP) است که در سال ۱۹۷۳ توسط "اسرینیواسان" و "شوکر" معرفی شده‌است [۲۵] و مبنای رتبه‌بندی

گزینه‌ها در آن، اندازه‌گیری فاصله هر گزینه از نقطهٔ ایده‌آل است. روش (LINMAP) با شروع از ماتریس تصمیم‌گیری و ترجیحات تصمیم‌گیرنده نسبت‌به مقایسات سراسری در خصوص راهکارها، وزن‌ها و نقطهٔ ایده‌آل تصمیم‌گیرنده را ایجاد می‌کند [۲۳]. در این روش m گزینه و n شاخص از یک مسألهٔ مفروض به‌صورت m نقطه در یک فضای n بعدی مورد توجه قرار گرفته و سپس نقطهٔ ایده‌آل تشخیص داده‌شده و گزینه‌ای که دارای کمترین فاصله از ایده‌آل باشد، انتخاب می‌شود. فرض بر این است که تصمیم‌گیرنده از دو گزینهٔمفروض نیز نزدیکترین به ایده‌آل را انتخاب خواهد کرد [۱، ۱۲].

"پکلمان" و "سن" [۲۲] نیز مجموعه‌ای از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی را برای محاسبهٔ اوزان شاخص‌های تصمیم‌گیری پیشنهاد داده‌اند. در روشی دیگر، "برناردو" و "بلین" [۷] یک مدل ریاضی برگرفته از مدل تخصیص را برای اولویت‌بندی مجموعه‌ای از گزینه‌ها به‌کار برده‌اند. هدف آن‌ها در مسأله، یافتن تخصیصی از یک مجموعه گزینه‌ها به مجموعه‌ای از رتبه‌ها به گونه‌ای است که بیشترین سازگاری را با نظرات تصمیم گیرندگان درخصوص رتبه‌بندی گزینه‌ها داشته باشد. "مستافی" و "ژاویر"[۲۱] مسأله تصمیم‌گیری چندشاخصه را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله و حل نمودند. "هورویتز" و "زاپ" [۱۱] نیز یک مدل برنامه‌ریزی خطی را برای محاسبهٔ اوزان شاخص‌های تصمیم‌گیری ارائه داده‌اند. "شیرلاند" و همکاران [۲۴] از یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی برای تعیین برآوردهای مقید از اوزان شاخص‌ها استفاده نموده‌اند.

در سال‌های اخیر، کاربرد روش‌های مبتنی‌بر برنامه‌ریزی ریاضی برای مسائل تصمیم‌گیری در شرایط عدم‌اطمینان توسعه و گسترش فراوانی داشته است. از آن جمله، "لی" و همکاران [۱۷] کاربرد روش برنامه‌ریزی کسری در تصمیم‌گیری با داده‌های فازی شهودگرا را مطرح نموده‌اند. لی [۱۸] از یک مدل غیرخطی به‌منظور استفاده از روش TOPSIS در شرایط عدم اطمینان استفاده نموده است. لی و همکاران [۱۹، ۲۰] همچنین دو مدل برنامه‌ریزی‌خطی را به منظور تصمیم‌گیری گروهی با داده‌های فازی شهودگرا و داده‌های فازی فاصله‌ای پیشنهاد داده‌اند. "وانگ" و همکاران [۲۷] نیز از مدلی برنامه‌ریزی کسری برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه در شرایط عدم

قطعیت استفاده نموده‌اند. توسعهٔ مدل LINMAP برای مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه در محیط‌های غیر قطعی نیز در [۱۴، ۱۶، ۲۹، ۳۱] بررسی شده است.

روش پیشنهادی

در این بخش نسبت به ارائهٔ یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای تجزیه و تحلیل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه و تعیین اوزان شاخص‌های تصمیم‌گیری اقدام شده‌است. منطق مورد استفاده در طراحی این مدل آن است که اوزان شاخص‌های تصمیم‌گیری به‌گونه‌ای محاسبه شوند که با توجه به گزینه‌های ایده‌آل تعریف‌شده، هر یک از گزینه‌ها بهترین امتیاز ممکن را برحسب معیار فاصله تا جواب‌های ایده‌آل به‌دست‌آورند.

ماتریس تصمیم‌گیری شکل ۱ را در نظر بگیرید. ابتدا نسبت به بی‌مقیاس‌سازی این ماتریس با استفاده از نرم اقلیدسی اقدام و ماتریس بی‌مقیاس شکل ۲ حاصل می‌گردد. بی‌مقیاس‌سازی اقلیدسی طبق رابطه زیر انجام می‌شود.

$$v_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_{ij}^{2}}} \qquad (1)$$

شاخص / گزینه	C_1	C_2	...	C_n
A_1	v_{11}	v_{12}	...	v_{1n}
A_2	v_{21}	v_{22}	...	v_{2n}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
A_m	v_{m1}	v_{m2}	...	v_{mn}

شکل ۲. ماتریس تصمیم بی‌مقیاس‌شده

حال گزینه‌های ایده‌آل مثبت و منفی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^+ = \{v_1^+,\ldots,v_n^+\} = \left\{\left(\max_i v_{ij} \middle| j \in J\right),\left(\min_i v_{ij} \middle| j \in J'\right)\right\}$$
$$A^- = \{v_1^-,\ldots,v_n^-\} = \left\{\left(\min_i v_{ij} \middle| j \in J\right),\left(\max_i v_{ij} \middle| j \in J'\right)\right\} \quad (۲)$$

که در این تعریف J مجموعهٔ معیارهای سود و J' مجموعهٔ معیارهای هزینه است. حال فاصل هر گزینه از ایده‌آل‌های مثبت و منفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_i^+ = \left[\sum_{j=1}^n w_j \left(v_{ij} - v_j^+\right)^2\right]^{1/2};\ i = 1,2,\cdots,m$$
$$d_i^- = \left[\sum_{j=1}^n w_j \left(v_{ij} - v_j^-\right)^2\right]^{1/2};\ i = 1,2,\cdots,m \quad (۳)$$

در رابطهٔ (۳)، $w_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$ بردار اوزان نامعلوم شاخص‌های تصمیم‌گیری با شرط $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ است که مدل سعی در تعیین مقادیر آن‌ها دارد. در مرحلهٔ بعدی متغیرهای t_i^+ و t_i^- به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$t_i^+ = \left(d_i^+\right)^2, t_i^- = \left(d_i^-\right)^2 \quad (۴)$$

با توجه به تعریف فوق شاخص نزدیکی نسبی به‌عنوان امتیاز هر گزینه به صورت زیر تعریف می‌شود (در روش TOPSIS از d_i^+ و d_i^- استفاده می‌شود):

$$CI_i = \frac{t_i^-}{t_i^- + t_i^+} \quad (۵)$$

شکل اولیهٔ مدل پیشنهادی برای محاسبه اوزان $w_j (j = 1,2,\ldots,n)$ شاخص‌ها به‌صورت زیر است:

$$\max Z = \max\{CI_1, CI_2, \cdots, CI_m\}$$
$$S.T.\ \sum_{j=1}^n w_j = 1$$
$$w_j \geq 0\ ;\ j = 1,2,\cdots,n \quad (۶)$$
$$CI_i \leq 1\ ;\ i = 1,2,\cdots,m$$

حال قرار دهید $a_{ij} = \left(v_{ij} - v_j^+\right)^2$ و $b_{ij} = \left(v_{ij} - v_j^-\right)^2$. در نتیجه رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$CI_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_j a_{ij}} \quad (۷)$$

بر اساس الگوریتم Maximax مدل (۶) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\phi = max\{CI_1, CI_2, \cdots, CI_m\} \\ &\phi \geq CI_i \,;\, \forall i = 1,2,\cdots,m \end{aligned} \quad (۸)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در (۸) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\forall i : \phi \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_j a_{ij}} \quad (۹)$$

با ضرب طرفین رابطه فوق، تساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$\forall i : \phi \sum_{j=1}^{n} w_j a_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij} - \phi \sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij} \quad (۱۰)$$

با جایگزینی رابطه (۵) در مدل (۶)، مدل زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &max\, Z = \phi \\ &S.T. \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \\ &\phi\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(a_{ij} + b_{ij}\right)\right) - \sum_{j=1}^{n} w_j b_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &w_j \geq 0 \;;\; j = 1,2,\cdots,n \\ &\phi \geq 0 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

بررسی تحدب

مدل (۱۱)، یک مدل غیرخطی مقید است که می‌تواند به‌وسیلهٔ روش‌هایی مانند گرادیان تقلیل یافته عمومی، برنامه‌ریزی خطی پیش رونده، تابع لاگرانژین و یا انواع روش‌های ابتکاری و فراابتکاری حل شود [۶، ۸، ۲۶]. باتوجه به این که هدف از مقالهٔ حاضر، ارائهٔ اوزان بهینهٔ شاخص‌های تصمیم‌گیری است، ازاین‌رو استفاده از روش‌های دقیق موردنظر خواهند بود. به عنوان مثال بسیاری از نرم‌افزارهای عمومی برنامه‌ریزی ریاضی، نظیر لینگو و لیندو از شیوهٔ گرادیان تقلیل یافته عمومی به‌منظور بهینه‌سازی یک مسأله غیرخطی استفاده می‌کنند. نکتهٔ قابل توجه آن است که آیا جواب به دست آمده از این نرم‌افزارها، برای مسئلهٔ موردنظر یک جواب بهینهٔ مطلق است یا تنها یک جواب بهینهٔ‌محلی را نشان می‌دهد. براین‌اساس در بخش حاضر، نسبت به بررسی مدل (۱۱) از

منظر محدب بودن تابع هدف و فضای موجه اقدام شده‌است.

لم ۱. تابع هدف مدل (۱۱)، یک تابع محدب است.

اثبات: باتوجه به اینکه تابع هدف مدل (۱۱) یک تابع خطی است، تحدب آن به‌سادگی معلوم است.

لم ۲. فضای جواب مدل (۱۱) یک مجموعه محدب است.

اثبات: ابتدا فضای جواب مدل (۱۱)، برای سادگی به صورت ماتریسی زیر نشان داده می‌شود که W یک بردار m تایی و A و B ماتریس‌های $m\times m$ و ϕ یک اسکالر است.

$$\begin{aligned} &W = 1 \\ &\phi W(A+B) - WB \geq 0 \\ &W \geq 0, \phi \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

حال فرض کنید (ϕ_1, W_1) و (ϕ_2, W_2) دو جواب موجه برای مدل (۱۲) باشند. در این صورت روابط زیر برقرار خواهند بود:

$$\begin{aligned} &W_1 = 1 \\ &\phi_1 W_1(A+B) - W_1 B \geq 0 \\ &W_1 \geq 0, \phi_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} &W_2 = 1 \\ &\phi_2 W_2(A+B) - W_2 B \geq 0 \\ &W_2 \geq 0, \phi_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

حال، چنانچه رابطه (۱۳) در $\lambda \in [0,1]$ و رابطه (۱۴) در $1-\lambda$ ضرب و محدودیت اول و دوم دو رابطه به ترتیب با یکدیگر جمع شوند، رابطهٔ زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\lambda W_1 + (1-\lambda)W_2 = 1 \\ &[\lambda\phi_1 W_1 + (1-\lambda)\phi_2 W_2](A+B) - [\lambda W_1 + (1-\lambda)W_2]B \geq 0 \\ &\lambda\phi_1 W_1 + (1-\lambda)\phi_2 W_2 \geq 0, \lambda W_1 + (1-\lambda)W_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

بر این اساس ترکیب محدب دو نقطه (ϕ_1, W_1) و (ϕ_2, W_2) نیز به فضای موجه اختصاص دارد و بر این اساس اثبات قضیه تکمیل می‌شود.

الگوریتم حل

باتوجه به اینکه مدل (۱۱)، در واقع شامل بهینه‌سازی یک تابع هدف محدب برروی یک مجموعه جواب موجه می‌باشد، بر این اساس هر جواب بهینهٔ محلی این تابع را می‌توان به عنوان جواب بهینه مطلق در نظر گرفت [۶، ۸] . براین اساس می‌توان از روش‌های مختلفی برای یافتن جواب این مسأله استفاده نمود. ازجمله روش‌های قابل استفاده برای حل این مسأله، روش گرادیان عمومی تقلیل‌یافته[1] (GRG) است که بسیاری از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی ریاضی، نظیر لینگو، نیز بر این اساس نسبت به حل مسائل غیرخطی اقدام می‌کنند. "آبادیه" و "کارپنتیر" [۴] این الگوریتم را به‌عنوان تعمیم روش گرادیان تقلیل‌یافته ولف [۲۸] و برای حل مسائل غیرخطی با محدودیت‌های نامساوی ارائه داده‌اند. بسیاری از روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی شامل خطی‌کردن مسأله و استفاده از شیوهٔ برنامه‌ریزی خطی، طی مراحل زیر است:

۱. به‌دست‌آوردن مدل با نقاط عملیاتی و خطی‌سازی تمام محدودیت‌های تابع هدف حول نقاط عملیاتی؛

۲. تکرار روش برنامه‌ریزی‌خطی برای رسیدن به جواب مناسب با خطی نمودن توابع محدودیت‌ها و تابع هدف که در صورت نرسیدن به جواب با خطی‌سازی دوبارهٔ محدودیت‌ها و تابع هدف حول نقطهٔ‌جدید، بهینهٔ مسأله مشخص می‌شود.

یکی از مشکلات روش‌های فوق آن است که امکان دارد این روش‌ها به همگرایی نرسند. ازاین‌رو، روش GRG یکی از بهترین الگوریتم‌های عمومی برای حل مسائل غیرخطی مقید است. آوریل [۵] معتقد است در صورت خطی بودن مدل، روش (GRG) معادل با روش رگرسیون و در صورت نامقید بودن مسأله همان روش گرادیان تقلیل‌یافته خواهد بود. بر این اساس به‌منظور حل مدل پیشنهادی و باتوجه به موجه و محدب بودن فضای جواب آن، از بستهٔ نرم‌افزاری لینگو استفاده شده است که براساس راهنمای این نرم افزار از روش GRGبرای حل مسائل غیرخطی استفاده می‌کند.

1- Generalized Reduced Gradient (GRG)

مثال عددی

در این بخش با استفاده از دو مثال، نحوهٔ استفاده از مدل پیشنهادی در تعیین اوزان تصمیم‌گیری مسائل چندشاخصه ارائه شده‌است.

مثال ۱. این مثال در هوانگ و یون [۱۲] ارائه و با استفاده از روش LINMAP حل شده است. مسأله شامل ۵ گزینه است که بر اساس دو شاخص مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. ماتریس تصمیم مسأله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۵ & ۴ \\ ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

در این مسأله گزینه‌های A_1 تا A_5 براساس شاخص‌های x_1 و x_2 ارزیابی شده‌اند. قضاوت اولیه تصمیم‌گیرنده درخصوص ترجیحات زوجی گزینه‌ها نسبت‌به یکدیگر به صورت زیر بوده است:

$$\Omega = \{(1,2),(3,1),(4,1),(5,1),(2,3),(2,4),(2,5),(4,3),(3,5),(4,5)\}$$

به‌طورمثال براساس این رتبه‌بندی اولیه A_1 بر A_2 و A_4 بر A_1 ترجیح داده شده است. به‌رغم ناسازگاری موجود در مجموعهٔ Ω مسأله فوق با استفاده از روش LINMAP حل شده و نتایج زیر از آن حاصل شده است.

$$w^* = (.۰۲۷۷, .۰۵۵۴)$$
$$v^* = (.۰۸۳۳, .۱۹۴۴)$$

که w^* بردار اوزان و v^* بردار ایده‌آل می‌باشد. حال نسبت به حل مسأله فوق با استفاده از مدل پیشنهادی اقدام می‌گردد. در گام نخست نسبت به بی‌مقیاس‌سازی ماتریس تصمیم با استفاده از نرم اقلیدسی اقدام می‌شود. ماتریس بی‌مقیاس به‌صورت زیر خواهد بود.

$$V=\begin{bmatrix} ۰ & ۰.۶۷۴۲ \\ ۰.۷۷۱۵۱۷ & ۰.۵۳۹۳۶ \\ ۰ & ۰.۲۶۹۶۸ \\ ۰.۱۵۴۳۰۳ & ۰.۴۰۴۵۲ \\ ۰.۶۱۷۲۱۳ & ۰.۱۳۴۸۴ \end{bmatrix}$$

حال گزینه‌های ایده‌آل مثبت و منفی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^{+}=\{۰.۷۷۱۵۱۷,۰.۶۷۴۲\}$$
$$A^{-}=\{۰,۰.۱۳۴۸۴\}$$

سپس مقادیر a_{ij} و b_{ij} طبق تعریف محاسبه می‌شوند.

$$A=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} a_{i1} \\ \begin{bmatrix} 0.595238 \\ 0 \\ 0.595238 \\ 0.380952 \\ 0.02381 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} a_{i2} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.018182 \\ 0.163636 \\ 0.072727 \\ 0.290909 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} b_{i1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.595238 \\ 0 \\ 0.02381 \\ 0.380952 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} b_{i2} \\ \begin{bmatrix} 0.290909 \\ 0.163636 \\ 0.018182 \\ 0.072727 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

باتوجه به ماتریس‌های فوق، مدل (۱۳) برای محاسبهٔ اوزان بهینه این مسأله به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$max\, Z=\phi$$
$$S.T.\quad w_۱+w_۲=۱$$
$$\phi[۰.۵۹۵۲۳۸w_۱+۰.۲۹۰۹۰۹w_۲]-۰.۲۹۰۹۰۹w_۲\le ۰$$
$$\phi[۰.۵۹۵۲۳۸w_۱+۰.۱۸۱۸۱۸w_۲]-۰.۵۹۵۲۳۸w_۱-۰.۱۶۳۶۳۶w_۲\le ۰$$
$$\phi[۰.۵۹۵۲۳۸w_۱+۰.۱۸۱۸۱۸w_۲]-۰.۰۱۸۱۸۲w_۲\le ۰$$
$$\phi[۰.۴۰۴۷۶۲w_۱+۰.۱۴۵۴۵۴w_۲]-۰.۰۲۳۸۱w_۱-۰.۰۷۲۷۲۷w_۲\le ۰$$
$$\phi[۰.۴۰۴۷۶۲w_۱+۰.۲۹۰۹۰۹w_۲]-۰.۳۸۰۹۵۲w_۱\le ۰$$
$$w_۱,w_۲,\phi\ge ۰$$

با حل مدل فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$w_۱^{*}=۰.۲۵$$
$$w_۲^{*}=۰.۷۵$$

با جای‌گذاری این مقادیر در رابطهٔ (۷) و با توجه به ماتریس‌های A و B، شاخص

نهایی رتبه‌بندی هر یک از گزینه‌های تصمیم‌گیری به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$CI_{A_1} = ۰.۵۹۴۵۱۵ \quad CI_{A_4} = ۰.۹۵۲۱۸۲$

$CI_{A_2} = ۰.۰۴۷۸۱۸ \quad CI_{A_5} = ۰.۲۸۷۷$

$CI_{A_3} = ۰.۲۹۸۲۰۳$

بر این اساس ارجحیت گزینه‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2$

چنانچه تصمیم‌گیرنده درخصوص اولویت اوزان نسبت به یکدیگر نظراتی داشته باشد، می‌توان این نظرات را در قالب محدودیتی به مدل وارد ساخت. در مثال مورد بررسی فرض کنید از نظر تصمیم‌گیرنده وزن شاخص‌ها باید رابطهٔ زیر را با یکدیگر داشته باشد:

$$\frac{w_1}{w_2} \geq \frac{۴}{۵}$$

چنانچه، این محدودیت به صورت $۵w_1 \geq ۴w_2$ وارد مدل شود، آنگاه با حل مدل نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد: $w_1^* = ۰.٤٤٤٤٤٤, w_2^* = ۰.۵۵۵۵۵۶$. بر این اساس تصمیم‌گیرنده می‌تواند ترجیحات و نظرات خود درخصوص شاخص‌ها را نیز در صورت نیاز در مدل وارد سازد. ملاحظه می‌گردد که کاربرد مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل LINMAP به‌دلیل عدم نیاز به مجموعه اولیه ترجیحات ساده‌تر است.

مثال ۲. در این قسمت مثالی دیگری برگرفته از "تقی‌زاده" و همکاران [۲] با روش پیشنهادی بررسی شده است. آن‌ها در این مطالعه با استفاده از الگوهای سه‌شاخه‌ای اسکات و ارزیابی متوازن به تعیین شاخصه‌های مناسب برای ارزیابی عملکرد در صنعت نساجی کشور پرداخته و نسبت‌به ارزیابی سه واحد ریسندگی، بافندگی و چاپ و تکمیل در یک کارخانه نساجی با استفاده از روش‌های تحلیل سلسله‌مراتبی و TOPSIS اقدام نموده‌اند. شاخص‌های مورد نظر در این تحقیق شامل رضایت شغلی (x_1)، رضایت مشتری (x_2)، سود خالص (x_3)، نرخ بازده فروش (x_4)، فروش (x_5)، گردش موجودی (x_6)، ارزش نیروی انسانی (x_7)، کل دارایی (x_8) و سبک مدیریت (x_9) می‌باشد. جدول ۱ داده‌های مربوط به شاخص‌های در سه بخش مورد ارزیابی را نشان می‌دهد.

جدول ۱. ماتریس تصمیم‌گیری

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
ریسندگی	٤	٣	١,٦٤٨	٠,٨٩	١٢,٦٠٧	١٤,١٢٧	٦,٠٨	٣,٤٢٤	٥
بافندگی	٥	٧	١١,١٠١	٠,٣١	٩٦,٣٦٩	٩٦,٣٦٩	٦,٧٧	١,٨٧٦	٤
چاپ و تکمیل	٧	٥	٢٣,٨٣٨	٩,٣٠	٣٤,٢٩٤	٣٤,٢٩٤	٧,٢	٩,٦١	٧

تقی‌زاده و همکاران در تحقیق خود با استفاده از روش آنتروپی شانون، اوزان معیارها را به ترتیب برابر با ۰,۰۱۱۹، ۰,۰۹۶۳، ۰,۰۰۱۱، ۰,۱۱۵۲، ۰,۲۹۶۴، ۰,۳۰۱۵، ۰,۱۴۱۲، ۰,۰۲۴۴ و ۰,۰۱۱۹ محاسبه و با استفاده از روش TOPSIS اولویت گزینه‌ها به‌صورت چاپ و تکمیل، بافندگی و ریسندگی به‌دست آمده است. حال فرض کنید تصمیم‌گیرنده مایل است تأثیر و اهمیت هیچ یک از معیارها بیش از دو برابر معیار دیگر نباشد. بااستفاده از مدل طراحی‌شده و افزودن مجموعه‌ای از محدودیت‌ها به‌صورت

$$\frac{w_i}{w_j} \le ۲, i, j = ۱,۲,\ldots,۹, i \ne j$$

اوزان معیارها با استفاده از مدل پیشنهادی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

جدول ۲. اوزان حاصل از مدل

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
وزن	۰,۰۷	۰,۱۴	۰,۰۷	۰,۱۱	۰,۰۷	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۴

ملاحظه می‌گردد که بر اساس مدل طراحی‌شده، اهمیت هیچ یک از معیارها، بیش از دو برابر معیار دیگر نمی‌باشد. با استفاده از این اوزان نیز اولویت گزینه‌ها به‌صورت چاپ و تکمیل، بافندگی و ریسندگی و به‌ترتیب با شاخص‌های نزدیکی نسبی ۰,۷۶، ۰,۴۵ و ۰,۰۱ به‌دست‌آمده است.

بحث و نتیجه‌گیری

روش‌ها و مدل‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره از پرکاربردترین ابزارهای تحقیق در عملیات به‌شمار می‌روند. در بحث انتخاب و رتبه‌بندی گزینه‌های برتر انواع روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه از اهمیت بسیاری برخوردارند. دربارهٔ اهمیت کاربرد این

مدل‌ها در تصمیم‌گیری مباحث گسترده‌ای مطرح شده است. مقالهٔ حاضر سعی در ارائهٔ روشی نوین به‌منظور تعیین اولویت و اهمیت شاخص‌های مؤثر در تصمیم‌گیری و ارزیابی اوزان این شاخص‌ها در راستای تعیین ارجحیت مطلوب آن‌ها دارد .این مدل با بهره‌گیری از منطق روش‌های LINMAP و TOPSIS سعی در یافتن اوزان بهینه، تحت شرایطی داشت که معیار بیشترین فاصله از ایده‌آل منفی و کمترین فاصله از ایده‌آل مثبت به‌صورت هم‌زمان، نظیر روشTOPSIS، مورد توجه قرارگرفته و در این شرایط اوزان بهینه شاخص‌های تصمیم‌گیری را به‌دست‌آورد. این اوزان می‌توانند مناسب‌ترین اوزان برای رتبه‌بندی شاخص‌ها با استفاده از روش TOPSIS باشند. ضمن آن که روش خود یک رتبه‌بندی منطقی براساس شاخص تعریف‌شده نزدیکی نسبی را از گزینه‌ها ارائه می‌دهد. در مقایسه با برآورد اوزان شاخص‌ها بااستفاده از روش LINMAPنیز مدل پیشنهادی به میزان اطلاعات کمتری از تصمیم‌گیرنده نیاز دارد. در واقع، اگرچه مشارکت تصمیم‌گیرنده در فرایند تصمیم‌گیری یک نقطهٔ قوت محسوب می‌شود، باوجوداین در بسیاری از مسائل عملی تصمیم‌گیرندگان امکان حضور در فرایند یا اطلاعات کافی و مورد نیاز را در اختیار ندارند. ازاین‌رو، روش پیشنهادی برای آن دسته مسائلی که تصمیم‌گیرنده امکان مشارکت در فرایند تصمیم‌گیری را ندارد، مناسب است .ضمن‌آن‌که روش پیشنهادی با درنظرگرفتن نظرات تصمیم‌گیرنده، پیرامون ترجیحات قائل میان اوزان شاخص‌های مختلف، این نظرات را در محاسبهٔ اوزان به‌کارگرفته و نافی نظرات تصمیم‌گیرنده در این خصوص نمی‌باشد. در تحقیقات آتی می‌توان نسبت‌به مقایسه نتایج این روش با روش‌های آنتروپی و LINMAPبرای محاسبهٔ اوزان از طریق شبیه‌سازی اقدام نمود. همچنین می‌توان نسبت‌به توسعهٔ مدل‌های غیرخطی دیگر با تعمیم مدل‌های مجموع ساده‌وزنی، مدل حاصل ضربی موزون و مدل مجموع ادغامی مجموع – حاصل‌ضرب (WASPAS) برای محاسبهٔ اوزان شاخص‌ها و رتبه‌بندی گزینه‌ها اقدام نمود. حاصل ضمن آن که باتوجه به روند توسعهٔ مدل‌های ریاضی در مسائل تصمیم‌گیری فازی، می‌توان این مدل را در مسائل تصمیم‌گیری با داده‌های نادقیق فازی یا فاصله‌ای تعمیم و نتایج آن را با روش‌های دیگر مورد مقایسه قرار داد.

منابع

۱. اصغرپور، محمد، **تصمیم‌گیری چندمعیاره**، چاپ سوم، تهران :انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۸۳.

۲. تقی‌زاده، امیراشکان، حامد صالحی و حسن جوانشیر، **بیان و مطالعهٔ ارزیابی عملکرد کارخانجات نسانجی با استفاده از روش TOPSIS وAHP** ، ماهنامهٔ نساجی امروز، سال دوازدهم، شمارهٔ۹۸، مرداد۱۳۸۹ ، صص.۵۵-۵۰.

۳. مهران، محمدرضا، **تصمیم‌گیری با چندین هدف**، چاپ اول، تهران :انتشارات دانشکده مدیریت دانشگاه تهران،۱۳۸۶.

4. Abadie, J., Carpentier, J. "**Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints**"**.** In Fletcher, R. (Ed.), ***Optimization***, Academic Press, London, 1969.
5. Avriel, M. **Nonlinear Programming: Methods and Analysis**, Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1976.
6. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M. **Nonlinear Programming**, 3rd edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2006.
7. Bernardo, J.J., Blin, J.M. **"A programming model of consumer choice among multi-attributed brands"**. Journal of Consumer Research, 4(2), pp. 111-118, 1977.
8. Bertsekas, D.P. **Nonlinear Programming**, 2nd edition, Athena Scientific, Massachusetts, 1999.
9. Climaco, J.. **Multicriteria analysis**, Springer, New York, 1997.
10. Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M. **Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys**, Springer, Boston, 2004.
11. Horowitz, I., Zappe, C. **"The linear programming alternative to policy capturing for eliciting criteria weights in the performance appraisal process"**. Omega, 23(6), 1995, pp. 667-676.
12. Hwang, C.L, Yoon, K. **Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications**, Springer Verlag, New York, 1981.
13. Jahanshaloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Izadikhah, M. **"Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data"**. Applied Mathematics and Computation, 181(2), pp. 1544–1551, 2006.
14. Li, D.F., Yang, J.B. **"A multiattribute decision making approach using intuitionistic fuzzy sets"**. Proceedings of 3rd Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, Zittau, Germany, September 10-12, pp. 183-186, 2003.
15. Li, D.F. **"A fuzzy closeness approach to fuzzy multi attribute decision making"**, Fuzzy Optimization and Decision Making, 6(3), pp. 237-254, 2007.

16. Li, D.F. **"Extension of the LINMAP for multiattribute decision making under Atanassov's intuitionistic fuzzy environment"**, Fuzzy Optimization and Decision Making, 7(1), pp. 17 – 34, 2008.
17. Li, D.F., Wang, Y.C., Liu, S., Shan, F. **"Fractional programming methodology for multi-attribute group decision-making using IFS"**. Applied Soft Computing, 9(1), pp. 219-225, 2009.
18. Li, D.F. **"TOPSIS based nonlinear programming methodology for multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy sets"**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 18(2), 299-311, 2010.
19. Li, D.F., Chen, G.H., Huang, Z.G. **"Linear programming method for multiattribute group decision making using IF sets"**. Information Sciences, 180(9), pp. 1591-1609, 2010.
20. Li, D.F. "**Linear programming method for MADM with interval-valued intuitionistic fuzzy sets",** Expert Systems with Applications, 37(8), 2010, pp. 5939-5945.
21. **Mustafi, C.K., Xavier, M.J.** "Mixed-integer linear programming formulation of a multi attribute threshold model of choice"**. The Journal of the Operational Research Society, 36(10), 195, 99. 935-942.**
22. **Pekelman, D., Sen, S.K.** "Mathematical programming models for the determination of attribute weights"**, Management Scince, 20(8), pp. 1217-1229.**
23. **Pomerol**, J.C., Barba-Romero, S. **Multicriterion decision in management: principles and practice**, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2000.
24. Shirland, L.E., Jesse, R.R., Thompson, R.L., Iacovou, C.L. **"Determining attribute weights using mathematical programming"**, Omega, 31(6), pp. 423-437.
25. Srinivasan, V., Shocker, A.D. **"Linear programming techniques for multidimensional analysis of preference"**, Psychometrika, 38(3), pp. 337-369, 1973.
26. Talbi, E.G. **Metaheuristics: from design to implementation**, John Wiley & Sons, New Jersey, 2009.
27. Wang, Z., Li, K.W., Xu, J. **"A mathematical programming approach to multi-attribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessment information"**. Expert Systems with Applications, 38(10), 12462-12469, 2011.
28. Wolfe, P., **"Methods of Nonlinear Programming"**, In Graves, R.L., Wolfe, P. (Eds). **Recent Advances in Mathematical Programming**, New York, McGraw-Hill, 1963.
29. Xia, H.C., Li, D.F., Zhou, J.Y. Wang, J.M. **"Fuzzy LINMAP method for multiattribute decision making under fuzzy environments"**, Journal of Computer and System Sciences, 72(4), pp. 741-759, 2006.

30. Yoon, K., Hwang, C.L. **Multiple Attribute Decision Making: An Introduction**, Sage Publications Inc, 1995.
31. Yousefli, A., Heydari, M., Shahanaghi, K. "**Development of Linear Programming Technique for Multidimensional Analysis of Preference in Fuzzy Environment**". Journal of Uncertain Systems, 3(2), pp. 108-113, 2009.

فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال یازدهم، شماره ۲۹، تابستان ۹۲
صفحات ٤١ تا ٥٩

ارائۀ یک مدل ریاضی برای زمان‌بندی و موازنۀ خط مونتاژ هزینه‌گرا با محدودیت منابع

محمد رحیم رمضانیان *
محمدحسن قلی زاده **
شیوا شبان ***

چکیده

در این مقاله، با تکیه بر پیشینۀ مسائل موازنۀ خط مونتاژ هزینه‌گرا، یک مدل ریاضی جدید، برای زمان‌بندی و موازۀ خط مونتاژ ارائه شده است که با ترکیب زمان تنظیم وابسته به توالی وظایف، ایستگاه‌های موازی و محدودیت منبع، هزینه‌های عملیاتی و سرمایه‌گذاری سیستم مونتاژ را کمینه می‌نماید.
با توجّه به پیچیدگی مسأله، روابطی برای کاهش تعداد متغیرهای مدل پیشنهاد شده است که دستیابی به راه حل بهینه را در زمانی قابل قبول با استفاده از الگوریتم‌های دقیق تسهیل می‌نماید .برای شفاف‌سازی و بیان ویژگی‌های مدل نیز از یک مثال عددی استفاده شده است .همچنین جواب‌های به‌دست‌آمده از مدل در چندین مثال، با استفاده از شاخص‌های مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج حاکی از عملکرد مطلوب مدل می‌باشد.

واژگان کلیدی: زمان‌بندی، موازنۀ خط مونتاژ هزینه‌گرا، زمان تنظیم، ایستگاه موازی، محدودیت منبع.

---

* استادیار و عضو هیئت علمی دانشگاه گیلان،گروه مدیریت صنعتی
** استادیار و عضو هیئت علمی دانشگاه گیلان،گروه مدیریت صنعتی
*** دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی، دانشگاه گیلان (نویسنده مسئول) shiva.shaban@gmail.com
تاریخ دریافت: ۹۱/۹/۱۲ **تاریخ پذیرش: ۹۱/۱۲/۱۳**

مقدمه

خطوط مونتاژ سیستم‌های تولیدی جریان گرایی[1] هستند که از اهمیّت زیادی در تولید صنعتی محصولات استاندارد و با حجم بالا برخوردارند و حتّی اخیراً در تولید محصولات سفارشی و با حجم پایین نیز رواج یافته‌اند [۱]. هدف اصلی طراحان این خطوط، افزایش کارایی سیستم از طریق بیشینه ساختن نسبت توان عملیاتی به هزینه‌ها است، و از این رو موازنه‌ی خط مونتاژ و دستیابی به سیستمی بهینه، یکی از مهم‌ترین اقداماتی است که باید در طراحی خطوط مونتاژ مورد توجّه قرار گیرد [۲]. منظور از مسأله‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ، تخصیص وظایف به جایگاه‌های کاری است که ایستگاه نامیده می‌شود، به گونه‌ای که روابط پیش‌نیازی، زمان سیکل و سایر محدودیت‌های خط مونتاژ رعایت و شماری از معیارهای عملکرد خط بهینه گردد[۳].

بسیاری از تحقیقات در این زمینه به مدل‌سازی و حل مسأله‌ی ساده‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ[2] اختصاص دارد [۴]، امّا در سال‌های اخیر دامنه‌ی وسیعی از ادبیّات به مسائل واقعی و تعمیم یافته‌ای پرداخته‌اند که شامل مسأله‌ی انتخاب تجهیزات، موازی سازی، چیدمان نعلی شکل و غیره هستند و تا به امروز نیز بسیاری از این ویژگی‌ها شناسایی و مدل‌سازی شده‌اند. می‌توان مطالعات مروری، و طبقه‌بندی‌های مختلف مسائل موازنه را بر اساس ساختار آن، چیدمان خط، ویژگی محصول و... در منابع [۷]- [۵] مشاهده نمود. با این حال شکافِ بین نیازمندی‌های مسائل واقعی و مدل‌های ارائه شده قابل توجّه است و ترکیب ویژگی‌های این خطوط و توسعه‌ی مدلی که بتواند در موقعیّت‌های مختلف جوابگوی نیازِ سیستم به موازنه‌ی کارا باشد، هنوز هم نیاز به توجّه و بررسی دارد [۸].

بنابراین در این تحقیق با توجّه به بلندمدت بودن تصمیم‌گیری مربوط به موازنه‌ی خط مونتاژ و اهمیّت تأثیرگذاری معیار هزینه در تصمیم گیری مدیران، مدل‌های هزینه گرا مورد توجّه قرار گرفته‌اند و انگیزه‌ی اصلی از نگارش مقاله، بررسی این مدل‌ها، یافتن شکاف‌های تحقیقاتی و توسعه‌ی مدلی است که تا حد قابل قبول شکاف‌های موجود را کاهش داده و قابلیّت انعطاف پذیری بیشتری برای کاربرد عملی ایجاد نماید.

1- Flow-oriented
2- Simple Assembly Line Balancing Problem (SALBP)

در راستای هدف تحقیق، در بخش دوّم مقاله با بررسی پیشینه‌ی مدل‌های هزینه‌گرا، شکاف‌های تحقیقاتی موجود تبیین می‌شود. مسأله، مفروضات و فرمول‌بندی ریاضی آن به همراه روابطی که برای کاهش تعداد متغیرهای مدل پیشنهاد شده است به ترتیب در بخش سوم و چهارم ارائه می‌شود. در بخش پنجم برای شفاف سازی و بیان ویژگی‌های مدل از یک مثال عددی استفاده می‌شود. در بخش ششم عملکرد مدل در مثال‌های مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در بخش هفتم مقاله نیز نتایج و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی ارائه می‌شود.

مسأله‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ هزینه‌گرا

از جمله مهم‌ترین اهدافی که از موازنه‌ی خطوط مونتاژ دنبال می‌شود، کاهش عوامل هزینه‌زا است. اگرچه کمینه نمودن تعداد ایستگاه‌ها با توجّه به زمان سیکل معین، که به مسأله‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ زمان گرا[1] نیز معروف است، با کاهش هزینه‌ی مربوط به ایستگاه‌ها، هزینه‌ی سیستم را کاهش می‌دهد، امّا کاهش هزینه‌ای که از این طریق حاصل می‌شود نمی‌تواند عوامل هزینه‌زای موجود در خط مونتاژ را به خوبی نشان داده و ارتباط قابل فهمی بین تعداد ایستگاه‌ها، زمان سیکل و هزینه‌ی کل خط به وجود آورد [۹]. از این رو شایسته است مسأله‌ی موازنه مستقیماً بر اساس کمینه سازی هزینه مطرح شود.

مسأله‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ هزینه گرا[2]، تعمیم یافته‌ی مسأله‌ی موازنه‌ی زمان‌گرا است، و هدف اصلی آن کمینه ساختن هزینه‌های هر واحد از محصول است [۱۰]. با توجّه به اهمیّت این دسته از مسائل و اهدافی که از انجام این تحقیق مد نظر است، در ادامه پیشینه‌ی مسائل هزینه گرا مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

مروری بر پیشینه‌ی تحقیق

موسی زادگان و ذگردی (۱۳۸۷) مدل هزینه گرایی را برای موازنه‌ی خط مونتاژ ارائه نمودند که دو نوع هزینه‌ی عمده‌ی خطوط مونتاژ، یعنی هزینه‌ی خرید تجهیزات و هزینه‌ی دستمزد نیروی انسانی را که با الهام از مدل آمن (۲۰۰۰) و باکچین (۲۰۰۰)

1- Time-oriented
2- Cost-oriented Assembly Line Balancing Problem

شکل گرفته است، بهینه می‌نماید [۱۱].

روشنی و همکاران (۱۳۸۹) یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را برای موازنه‌ی خط مونتاژ دو طرفه[1] ارائه نمودند که مجموع دو هزینه‌ی دستمزد اپراتورها و هزینه‌ی ثابتِ راه اندازی خط را کمینه می‌نماید [۱۲]. در مدل ثابتی و اکبری (۱۳۸۹) خط مونتاژِ نعلی شکل، که مدل‌های مختلف یک محصول در آن مونتاژ می‌شوند، مدل‌سازی شده است. همچنین در این مدل از اصل حداقل مجموعه قطعات[2] و استراتژی تولید چرخه‌ای[3] استفاده می‌شود [۱۳].

مدل هزینه گرای دیگر توسط آمن (۲۰۰۰) مطرح شد. او در مدل خود علاوه بر روابط پیش‌نیازی مشخص و زمان انجام وظایف که می‌تواند قطعی، احتمالی و یا فازی[4] باشد، عامل دیگری را تحت عنوان هزینه‌ی انجام وظایف در واحد زمان در نظر می‌گیرد که شامل هزینه‌های پرسنلی، عملیاتی و سرمایه گذاری است [۱۴]. آمن (۲۰۰۶) مدل پیشین خود را با ادغام نمودن هزینه‌ی سرمایه‌گذاری و نیروی کار در قالب یک نرخ هزینه برای هر ایستگاه، اصلاح می‌نماید [۱۵]. باکچین و رابینویتز (۲۰۰۳) مدلی را که ترکیبی از ایستگاه‌های موازی، شقوق مختلف فرآیند و مسأله‌ی انتخاب تجهیزات را در بر می‌گیرد و تابع هدف آن کل هزینه‌ی تجهیزات سیستم را کمینه می‌نماید، ارائه نمودند [۱۶].

براتکو و همکاران (۲۰۰۳) مدلی را برای موازنه‌ی خط انتقال[5] ارائه نمودند. در این مدل مسأله‌ی اصلی موازنه به دو مسأله‌ی فرعی تقسیم می‌شود که در مسأله‌ی فرعی اوّل تخصیص تجهیزات به بلوک‌ها، تخصیص وظایف به تجهیزات و تخصیص وظایف به بلوک‌ها با هدف کمینه ساختن کل هزینه‌ی تجهیزات، و در مسأله‌ی فرعی دوّم، اختصاص بلوک‌ها به ایستگاه‌ها با هدف کمینه ساختن تعداد آن‌ها مد نظر قرار دارد [۱۷]. در مدلی که دُلگُی و ایهناتسِنکا (۲۰۰۴) ارائه نمودند نیز موازنه‌ی خط انتقال در نظر گرفته شده است و هدف آن تخصیص بهینه‌ی بلوک‌ها به ایستگاه‌ها، برای دستیابی به کمینه هزینه‌ی خط است [۱۸]. شایان ذکر است که این دو محقّق در سال ۲۰۰۹، مدل خود را توسعه داده و نحوه‌ی فعّال سازی بلوک‌ها را به صورت سریالی ـ موازی

1- Two-side
2- Minimum Part Set (MPS)
3- Cyclic
4- Fuzzy
5- Transfer line

در نظر می‌گیرند [۱۹]. در مدلی که باکچین و رابینویچ (۲۰۰۵) برای موازنه‌ی خط مونتاژ مختلط ارائه نمودند، الزام تخصیص وظایف مشترک مدل‌ها به یک ایستگاه که در سایر مدل‌های خطوط مختلط اِعمال می‌شده است حذف، و به جای آن هزینه‌ی اضافی مربوط به تکرار وظایف در ایستگاه‌ها به مدل افزوده شده است [۲۰].

ژانگ و همکاران (۲۰۰۸) مدلی با تابع هدف چندگانه را برای موازنه‌ی خط مونتاژی که اپراتورهایی با سطوح مختلف تجربه در آن مشغول به کار هستند ارائه نمودند. در این مدل فرض بر این است که هر اپراتور توانایی انجام همه‌ی وظایف مونتاژ را دارد و هزینه‌ی دستمزد بسته به سطح تجربه‌ی اپراتورها متفاوت است [۲۱].

مدل باک (۲۰۰۸) از چندین مسأله‌ی فرعی مانند، طرح ریزی پرسنل و فرآیند پردازش وظایف تشکیل شده است. در این مدل برای طرح‌ریزی پرسنل از کارگران عادی و شناور و برای اداره‌ی بهتر طرح ریزی مربوط به مدل‌های مختلف نیز به جای استفاده از مدل کامل از مدل مدولار[1] استفاده می‌شود [۲۲].

در مدل اِج و همکاران (۲۰۰۹) محدودیتی برای تعداد ایستگاه‌های موازی در هر جایگاه وجود ندارد و تابع هدف آن مجموع هزینه‌ی نیروی انسانی، سربار عملیاتی و تجهیزات ایستگاه را کمینه می‌نماید [۲۳].

پادرون و همکاران (۲۰۰۹) مدل هزینه گرایی را ارائه نمودند که در آن استفاده از ایستگاه‌های موازی مجاز دانسته شده و تابع هدف غیرخطی آن مجموع هزینه‌ی عملیاتی کوتاه مدت و هزینه‌ی سرمایه گذاری را کمینه می‌نماید [۲۴]. کاکیر و همکاران (۲۰۱۱) نیز خط مونتاژی با ایستگاه‌های موازی را در نظر گرفته اند که یک نوع محصول در آن مونتاژ می‌شود و زمان وظایف آن احتمالی است [۲۵].

مطابق با جدول ۱، برای مقایسه‌ی ویژگی‌های مدل‌های هزینه‌گرا و تعیین شکاف‌های تحقیقاتی، از طرح جامعی که بویسن و همکاران [۲۶] برای طبقه‌بندی مسائل موازنه‌ی خط مونتاژ ارائه نموده‌اند استفاده می‌شود.

1- Modular

جدول۱. نمادگذاری مدل‌های پیشینه‌ی تحقیق بر اساس طرح طبقه بندی بویسن

محقق (سال)	نماد
موسی زادگان و ذگردی (۱۳۸۷)	$[\mid res^{01} \mid Co]$
روشنی و همکاران (۱۳۸۹)	$[\mid pwork^{2} \mid Co]$
ثابتی و اکبری (۱۳۸۹)	$[t^{sto}, mix \mid unpac^{sync}, u \mid Co]$
آمن (۲۰۰۰) و (۲۰۰۶)	$[\mid res^{max} \mid Co]$
باکچین و رابینویتز (۲۰۰۳)	$[pa \mid pstat, equip \mid Co]$
براتکو و همکاران (۲۰۰۳)	$[\mid pstat \mid Co]$
دُلگُی و ایهناتسِنکا (۲۰۰۴) و (۲۰۰۹)	$[link, inc \mid pwork \mid Co]$
باکچین و رابینویچ (۲۰۰۵)	$[mix \mid div, ptask, res^{01} \mid Co]$
ژانگ و همکاران (۲۰۰۸)	$[\mid\mid Co, score]$
باک (۲۰۰۸)	$[mix, t^{dy}, inc,cum,min,max, pa \mid pstat, equip,res^{max} \mid Co]$
اِج و همکاران (۲۰۰۹)	$[\mid pstat \mid Co]$
پادرون و همکاران (۲۰۰۹)	$[\mid pstat \mid Co]$
کاکیر و همکاران (۲۰۱۱)	$[t^{sto} \mid pstat \mid Co, SSL^{line}]$

نمادگذاری مدل‌ها نشان می‌دهد که هیچ یک از آن‌ها زمان تنظیمِ وابسته به توالی[1] وظایف را در نظر نگرفته‌اند. این نوع زمان تنظیم هنگامی مطرح می‌شود که زمانِ تنظیم بین وظایف به زمان‌بندی انجام آن‌ها در ایستگاه وابسته باشد. این ویژگی توصیف کننده‌ی شرایط بسیاری از خطوط، به خصوص خطوط مونتاژ دستیِ است که اپراتورهای آن باید مرتباً ابزار را تعویض، یا ماشین‌آلات را برای وظیفه‌ی بعدی آماده نمایند. انعطاف‌پذیری بالای چیدمان موازی نیز بکارگیری آن را به خصوص در شرایطی ضروری می‌سازد که به علّت کوتاه بودن زمان سیکل یا پایین بودن نسبت انعطاف پذیری[2] فرآیند، امکان دستیابی به موازنه‌ی مؤثر خط و حجم تولید مورد نیاز

1- Sequence-dependent setup time
2- Flexible ratio

وجود ندارد. بنابراین در شرایطی که زمان سیکل کوتاه است و زمان تنظیم درصد بیشتری از آن را به خود اختصاص می‌دهد، ترکیب ایستگاه‌های موازی و زمان‌بندی وظایف می‌تواند کارایی موازنه و قابلیّت کاربری مدل را افزایش دهد. با این حال علاوه بر پیشینه‌ی تحقیق، در سایر حوزه‌های موازنه‌ی خط مونتاژ نیز، ایستگاه موازی همراه با مسأله‌ی زمان‌بندی وظایف مدل‌سازی نشده است. علاوه بر این نسبت دادن هزینه‌ها به منبع انجام دهنده‌ی آن، علاوه بر ردیابی بهتر هزینه‌ها، اِعمال محدودیت‌های مربوط به منابع را امکان پذیر می‌نماید و می‌توان کاربردِ مشترک منابع را نیز به مدل وارد نمود. با توجّه به توضیحات ارائه شده و با الهام از مدلی که اولین بار توسط آندرس و همکاران (۲۰۰۸)، برای زمان‌بندی وظایف ارائه شده است [۲۷]، ویژگی‌های منتخب برای ساخت مدل هزینه گرا عبارتند از:

۱) استفاده از زمان تنظیمِ وابسته به توالی، برای زمان‌بندی وظایف
۲) بکارگیری ایستگاه‌های موازی برای افزایش انعطاف‌پذیری سیستم مونتاژ
۳) هم افزایی هزینه از طریق اِعمال محدودیت مربوط به منابع فیزیکی
۴) اِعمال محدودیت منطقه بندی[1]، برای تخصیص واقع‌بینانه‌تر وظایف
۵) با استفاده از ویژگی‌های منتخب، نمادگذاری مدل به صورت زیر خواهد بود:

مدل پیشنهادی تحقیق (۱۳۹۱)	$[D_{dir}, link, inc \mid div, pstat, res^{01} \mid co]$

تعریف مسأله

هدف کلی مسأله تخصیص وظایف به مراکز کاری و زمان‌بندی آن‌ها است، به گونه‌ای که محدودیت‌های حاکم بر مسأله نقض نشوند و هزینه‌های سیستم مونتاژ در کمینه مقدار ممکن قرار گیرند. مسأله اجازه‌ی استقرار ایستگاه‌های موازی را برای تخصیص کاراتر و در شرایطی که ممکن است زمان انجام بعضی از وظایف از زمان سیکل بیشتر باشد، فراهم می‌نماید. یک اپراتور در هر ایستگاه از ابزار و تجهیزات متفاوتی برای انجام وظایف استفاده می‌کند، در این حالت اگر بیش از یک وظیفه به ایستگاهی تخصیص یابد، زمان تنظیم درون ایستگاهی بین وظایف به وجود می‌آید که تحت عنوان زمان تنظیمِ وابسته به توالی وظایف به مدل وارد می‌شود.

1- Zoning constraint

یکی از ویژگی‌های مهّم مدل لحاظ نمودن محدودیت منبع است. به این معنی که تعداد مشخصی از تجهیزات در خط وجود دارند که می‌توانند وظایف مختلف مونتاژ را انجام دهند و تخصیص وظیفه به یک ایستگاه تنها زمانی امکان پذیر است که تجهیز مورد نظر در آن ایستگاه موجود باشد و با کمبود آن مواجه نباشیم. همچنین شرایط تخصیص وظایف سازگار و ناسازگار نیز در مدل وجود دارد. سایر مفروضات مدل به صورت زیر خواهد بود:

- روابط پیش‌نیازی و زمان تنظیم بین وظایف مونتاژ معین و مستقل از ایستگاهی است که وظایف در آن انجام می‌شوند.
- در هر ایستگاه اجازه‌ی قرارگیری بیش از یک تجهیز وجود دارد.
- زمان پردازش هر وظیفه توسط انواع تجهیزاتی که می‌توانند آن را انجام دهند یکسان، و مستقل از مرکز کاری است که تجهیز در آن قرار دارد.
- اشتراک مجموعه وظایفی که با منبعی خاص انجام می‌شوند، تهی است.
- تجهیز مورد نیاز هر وظیفه مشخص است و شقوق مختلف برای فرآیند مونتاژ وجود ندارد.

فرمول‌بندی ریاضی مسأله

هدف از فرمول‌بندی ریاضی مسأله ارائه‌ی مدلی است که بتواند در قالب روابط ریاضی چگونگی تخصیص وظایف و تجهیزات به مراکز کاری، زمان‌بندی وظایف و تعداد بهینه‌ی ایستگاه‌های موازی را برای طراحی سیستمی که هزینه‌های سرمایه گذاری و عملیاتی در آن کمینه است، تعیین نماید.

t_i	زمان وظیفه‌ی i
s_j	بیشینه تعداد جایگاه زمان بندی در مرکز کاری j
p_{max}	بیشینه تعداد ایستگاه در هر مرکز کاری
tsu_{ik}	زمان تنظیم از وظیفه‌ی i به وظیفه‌ی k
wr_i	نرخ دستمزد وظیفه‌ی i
EC_e و FC	هزینه‌ی تجهیز نوع e، و هزینه‌ی ثابت هر ایستگاه
I_j	مجموعه وظایف قابل تخصیص به مرکز کاری j
I_{ej}	مجموعه وظایف قابل تخصیص به مرکز کاری j و قابل پردازش با تجهیز e

p_{ik} مجموعه‌ای از همه‌ی زوج مرتب‌هایی که i وظیفه‌ی بلافصل قبلی k می‌باشد

PT_i مجموعه‌ای از همه‌ی وظایف ماقبل i، به غیر از وظایف ماقبل بلافصل

e_i اولین مرکز کاری که وظیفه‌ی i می‌تواند به آن تخصیص یابد

l_i آخرین مرکز کاری که وظیفه‌ی i می‌تواند به آن تخصیص یابد

zc^+ و zc^- به ترتیب، مجموعه ای از زوج وظایف سازگار و ناسازگار هستند

x_{ij} خ {۰,۱} وظیفه‌ی i به مرکز کاری j تخصیص یابد

x_{ijps} خ {۰,۱} وظیفه‌ی i به مرکز کاری j با p ایستگاه و به جایگاه s تخصیص یابد

y_j خ {۰,۱} مرکز کاری j مورد استفاده قرار گیرد

z_{pj} خ {۰,۱} تعداد p ایستگاه موازی به مرکز کاری j تخصیص یابد

w_{ij} خ {۰,۱} وظیفه i به آخرین جایگاه زمان بندی در مرکز کاری j تخصیص یابد

N_{ikj} خ {۰,۱} وظیفه k، بلافاصله پس از وظیفه i، در همان سیکل یا سیکل بعدی انجام شود

E_{ej} خ {۰,۱} تجهیز e در مرکز کاری j قرار گیرد

$$\min TC = \sum_{j=1}^{m_{max}} \left(\sum_{p=1}^{p_{max}} p.z_{pj}. \left(\frac{c.\sum_{i=1}^{n} x_{ij} t_i wr_i}{\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} x_{ij} t_i} \right) \right) + \sum_{j=1}^{m_{max}} \sum_{p=1}^{p_{max}} p.z_{pj} \sum_{e=1}^{E} E_{ej}.EC_e +$$

$$\sum_{j=1}^{m_{max}} \sum_{p=1}^{p_{max}} p.z_{pj}.FC \qquad (۱)$$

s.t :

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{j=e_i}^{l_i} \sum_{s=1}^{s_j} x_{ijps} = 1 \qquad \forall i = 1,...,n \qquad (۲)$$

$$\sum_{j=1}^{m_{max}} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1,...,n \qquad (۳)$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{i \in I_j} x_{ijps} \le 1 \qquad \forall j; s = 1,...,s_j \qquad (۴)$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{s=1}^{s_j} x_{ijps} = x_{ij} \qquad \forall j; i \in I_j \qquad (۵)$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} z_{pj} = y_j \qquad \forall j = 1,2,...m_{max} \qquad (۶)$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{i \in I_j} x_{ijps+1} \le \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{i \in I_j} x_{ijps} \qquad \forall j; s = 1,...s_j - 1 \qquad (۷)$$

$$Mz_{pj} - \sum_{s=1}^{s_j} \sum_{i=I_j} x_{ijps} \geq 0 \qquad \forall j; p = 1,..., p_{max} \qquad (۸$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{j=e_i}^{l_i} \sum_{s=1}^{s_j} \max s_j \quad j-1 \quad +s \; x_{ijps} \leq \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{j=e_k}^{l_k} \sum_{s=1}^{s_j} \max s_j \quad j-1 \quad +s \; x_{kjps}$$
$$\forall (i,k) \in P_{ik} \qquad (۹$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{i \in I_j} \sum_{s=1}^{s_j} t_i x_{ijps} + \sum_{\forall (i,k) | (i \neq k) \wedge (i,k \in I_j)} tsu_{ik} N_{ikj} \leq c. \sum_{p=1}^{p_{max}} pz_{pj}$$
$$\forall j = 1,..., m_{max} \qquad (۱۰$$

$$\sum_{p=1}^{p_{max}} (x_{ijps} + x_{kjps+1}) \leq 1 + N_{ikj}$$
$$\forall j; s = 1,..., s_j - 1; \forall (i,k) \mid (i \neq k) \wedge (i,k \in I_j) \wedge k \notin PT_i \qquad (۱۱$$

$$x_{ijps} - \sum_{k \in I_j | (i \neq k) \wedge (k \notin PT_i)} x_{kjps+1} \leq w_{ij} \qquad \forall j; p; i \in I_j; s = 1,..., s_j - 1 \qquad (۱۲$$

$$w_{ij} + \sum_{p=1}^{p_{max}} x_{kjp1} \leq 1 + N_{ikj}$$
$$\forall j; (i,k) \mid (i \neq k) \wedge (i,k \in I_j) \wedge i \notin PT_k \qquad (۱۳$$

$$\sum_{i \in I_{ej}} x_{ij} - \left\| I_{ej} \right\| E_{ej} \leq 0 \qquad \forall j; e = 1,..., NE \qquad (۱۴$$

$$\sum_{i \in I_j} x_{ij} - \left\| I_j \right\| y_j \leq 0 \qquad \forall j = 1,..., m_{max} \qquad (۱۵$$

$$x_{aj} - x_{bj} = 0 \qquad \forall j; (a,b) \in zc^{+} \qquad (۱۶$$

$$x_{aj} + x_{bj} \leq 1 \qquad \forall j; (a,b) \in zc^{-} \qquad (۱۷$$

رابطه‌ی۱ تابع هدف مدل را نشان می‌دهد. بخش اول این تابع هزینه‌ی متغیر دستمزد نیروی انسانی را بر اساس میانگین وزنی نرخ دستمزد وظایف برای کل خط محاسبه می‌کند، بخش دوّم مربوط به هزینه‌ی متغیر ابزار و تجهیزات مورد نیاز وظایف است و بخش سوّم نیز مجموع هزینه‌ی ثابت ایستگاه‌ها را محاسبه می‌نماید. محدودیت‌های ۲ و ۳ باعث می‌شوند تا هر وظیفه فقط و فقط به یک مرکز کاری، یک جایگاه زمان‌بندی و تعداد مشخصی ایستگاه موازی تخصیص یابد. محدودیت ۴ تضمین می‌کند که در هر مرکز کاری و به هر جایگاه زمان بندی درون آن، تنها یک وظیفه می‌تواند تخصیص

یابد. رابطه‌ی ۵ نشان می‌دهد که اگر وظیفه‌ای به یک مرکز کاری تخصیص یابد، آن گاه تنها یک جایگاه زمان بندی و تعداد مشخصی ایستگاه موازی می‌تواند برای آن وظیفه در آن مرکز کاری وجود داشته باشد. محدودیت ۶ تضمین می‌کند که تنها تعداد مشخصی ایستگاه موازی می‌تواند برای هر مرکز کاری فعّال باشد.

محدودیت ۷ نشان می‌دهد که در هر مرکز کاری، وظایف باید با روندی افزایشی به جایگاه‌های زمان بندی تخصیص یابند. محدودیت ۸ بیان می‌کند که همه‌ی وظایف تخصیصی به یک مرکز کاری باید تعداد ایستگاه‌های موازی یکسانی داشته باشند. محدودیت ۹ رابطه‌ی پیش‌نیازی بین وظایف را هم در مراکز کاری و هم در جایگاه‌های زمان‌بندی درون آن‌ها منعکس می‌نماید. محدودیت ۱۰ تضمین می‌کند که مجموع زمان پردازش و زمان تنظیم بین وظایف در هر مرکز کاری از زمان سیکل مورد انتظار کمتر است. روابط ۱۱ تا ۱۳ ارتباط بین متغیرهای مدل را تعریف می‌نمایند. روابط ۱۴و۱۵ مربوط به محدودیت منابع و مراکز کاری تخصیص یافته می‌باشند. روابط ۱۶ و ۱۷ نیز به ترتیب محدودیت قرارگیری وظایف سازگار و ناسازگار را منعکس می‌نمایند.

مدل پیشنهادی از طبقه‌ی مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح[1] محسوب می‌شود که به علّت ویژگی‌های مربوط به مسائل موازنه‌ی خط مونتاژ، حتّی در مسائلی با وظایف کم نیز تعداد متغیرهای آن قابل توجّه است. از این رو برای کاهش تعداد متغیرهای مدل، می‌توان با اصلاح روابطی که در ادبیّات موضوع وجود دارد [۲۸]، اولین و آخرین مرکز کاری مجاز برای هر وظیفه را از روابط زیر محاسبه نمود:

$$e_i = \left[\left(\frac{t_i + \sum_{k \in p_i} t_k}{p_{max}} \right) / c \right]^+ \qquad (۱۸$$

$$l_i = m_{max} + 1 - \left[\left(\frac{t_i + \sum_{k \in s_i} t_k}{p_{max}} \right) / c \right]^+ \qquad (۱۹$$

p_i مجموعه‌ای از همه‌ی وظایف ماقبل i

s_i مجموعه‌ای از همه‌ی وظایف مابعد i

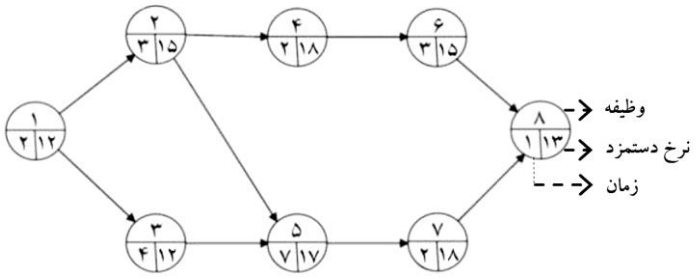
1- Integer Non- Linear Programming (INLP)

$[x]^+$ نمایانگر کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی با x است و بیشینه تعداد مراکز کاری (m_{max}) نیز برابر با تعداد وظایف خط مونتاژ در نظر گرفته می‌شود.

ارائه‌ی مثال عددی

از آنجایی که ترکیب ویژگی‌های موجود در مدل جدید است، با استفاده از ادبیّات تحقیق، مثالی خود ساخته برای شفاف سازی و نمایش ویژگی‌های مدل ایجاد می‌شود. مثال مورد نظر مربوط به خط مونتاژی با ۸ وظیفه است و اطلاعات مربوط به روابط پیش‌نیازی، نرخ دستمزد (ریال/دقیقه) و زمان وظایف (دقیقه) آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

زمان سیکل مورد انتظار سیستم معادل با ۸ دقیقه و بیشینه تعداد ایستگاه موازی در هر مرکز کاری ۲ عدد منظور می‌شود. نرخ دستمزد وظایف نیز با توزیع گسسته‌ی یکنواخت[1]، از بازه‌ی (۱۰،۲۰) انتخاب شده است.



شکل ۱. نمودار پیش‌نیازی مربوط به مثال عددی

ماتریس ترسیم شده در جدول ۲ زمان تنظیم بین وظایف را به صورت زوجی و با توجّه به ترتیب انجام آن‌ها نمایش می‌دهد. مؤلفه‌های این ماتریس به صورت تصادفی و با توزیع گسسته‌ی یکنواخت از بازه‌ی (۲،۰) ایجاد شده‌اند. برای تسهیل نمایش محدودیت منبع، دو نوع تجهیز الف و ب معرفی می‌شوند که مبلغ خرید هر یک از آن‌ها به ترتیب ۱۰ و ۲۰ میلیون ریال، و طول عمر مفید هر دو تجهیز نیز ۵ سال برآورد می‌شود. وظایف ۱،۲،۴،۶ و۸ با تجهیز الف و مابقی با تجهیز ب قابل پردازش می‌باشند.

1- Discrete uniform distribution

سیستم مونتاژ دارای یک شیفت کاری است و ۳۲۰ روز از سال با ۸ ساعت کار مفید روزانه به فعالیّت مونتاژ می‌پردازد. هر یک از ایستگاه‌ها هزینه‌ی ثابتی معادل با ۸۰ میلیون ریال را به خود اختصاص می‌دهند و میانگین طول عمر مفید تسهیلات مشترک ایستگاه‌ها نیز ۱۰ سال منظور می‌شود. وظایف ۵ و۶ به علّت ناسازگار بودن اِمکان قرارگیری در ایستگاه مشترک را ندارند.

جدول ۲. ماتریس زمان تنظیم بین وظایف

k / i	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸
۱	۰	۲	۲	۰	۰	۱	۱	۲
۲	۰	۰	۲	۱	۰	۲	۲	۲
۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱	۱
٤	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۰	۰
٥	۰	۱	۰	۲	۰	۰	۱	۱
٦	۲	۰	۲	۲	۲	۰	۲	۰
۷	۲	۲	۱	۲	۲	۰	۰	۰
۸	۱	۱	۲	۱	۲	۲	۲	۰

با توجّه به جدول ۳، با اجرای مدل توسط نرم افزار Cplex، علاوه بر چگونگی تخصیص وظایف و تجهیزات، زمان‌بندی انجام وظایف در هر یک از مراکز کاری به دست می‌آید. به این صورت که در مرکز کاری ۳، ابتدا وظیفه‌ی ۴ و سپس به ترتیب وظایف ۶ و ۸ انجام می‌شوند و همین توالی در سیکل‌های بعدی تکرار می‌گردد. همچنین با استقرار دو ایستگاه موازی در مرکز کاری ۲، اپراتورها زمان سیکل محلی برابر با ۱۶ دقیقه در اختیار دارند، در حالی که سایر مراکز کاری در هر سیکل بیشینه ۸ دقیقه زمان خواهند داشت تا وظایف تخصیصی را به اتمام برسانند.

جدول۳. نتایج حاصل از اجرای مدل با مثال عددی

مراکز کاری	زمان بندی وظایف	تعداد ایستگاه	زمان بیکاری (دقیقه)	تجهیز
۱	۱ → ۲	۱	۱	الف
۲	۳ → ۵ → ۷	۲	۱	ب
۳	٤ → ٦ → ۸	۱	۰	الف

بررسی عملکرد مدل

علاوه بر مثال عددی، مدل برای مثال‌های شناخته شده‌ی موجود در ادبّیات موضوع[1] حل می‌شود و جواب‌های آن هم از لحاظ معیار اصلیِ مدل یعنی هزینه، و هم از لحاظ شاخص‌های کارایی خط[2]،کارایی موازنه[3] و همواری خط[4] [۲۹] مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. مطابق با جدول ۴، برای مقایسه‌ی مدل پیشنهادی با مدل زمان گرا[5] و همچنین نمایش تأثیرِ لحاظ نمودن محدودیت منبع به مدل، هزینه‌ی هر واحد از محصول در سه مدل محاسبه شده است.

جدول ٤. هزینه‌ی هر واحد محصول (ریال)

مثال نمونه / مدل	منصور	جایشک	بُومن	مِرتن	مثال عددی
پیشنهادی	۲۲۷۱٦	٤٥۷۲	۸۹٥۰	۳۱۲٦	۲۷۷٤
فاقد محدودیت منبع	۲۳۸۳۳	٤۸۷٥	۹٤٦۳	۳۱۲٦	۳۲۹۲
زمان گرا	۲۲۹۹۷	٥٥۱۸	۱۰٦۱۷	۳۱۲۹	۳۰۸٤

مقادیر جدول ۴ نشان می‌دهد که در صورت حذف محدودیت منبع از مدل، هزینه‌ی هر واحد محصول در ۳ مثال اوّل و همچنین مثال عددی، نسبت به هزینه‌ی مدل پیشنهادی بیشتر است. همچنین در همه‌ی مثال‌ها، تفاوت قابل توجّهی بین هزینه‌ی مدل زمان‌گرا و مدل پیشنهادی وجود دارد. اگرچه این مقادیر بیانگرِ نتایج بهترِ مدل تحقیق نسبت به دو مدل دیگر است، امّا برای آزمون برتری معنادار مدل پیشنهادی از

1- www.assembly-line-balancing.de
2- Line Efficiency (LE)
3- Balance Efficiency (BE)
4- Smoothness Index (SI)

۵ـ مدلی که توسط آندرس و همکاران (۲۰۰۸) توسعه یافته است.

آزمون آماری استفاده می‌شود. با توجّه به این که تعداد مثال‌ها به اندازه‌ی کافی بزرگ نیستند و همچنین از رفتار آماره‌های آزمون اطّلاع دقیقی در دسترس نیست، از آزمون ناپارامتریک فریدمن برای بررسی تفاوتِ میانگین رتبه‌های هزینه‌ای سه مدل استفاده می‌شود.

با توجّه به اینکه سطح معناداری آزمون ۰,۰۳۶ است، فرض H. (برابری میانگین رتبه‌ها در سه مدل) رد و H_1 پذیرفته می‌شود. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف معناداری بین میانگین رتبه‌ها در سه مدل وجود دارد و اولویت بندی آن‌ها معنادار است. نتایج این اولویت‌بندی در جدول ۵ نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی بالاترین رتبه و دو مدل دیگر رتبه‌های کمتر و متعاقباً هزینه‌ی بیشتری را به خود اختصاص می‌دهند. بالاتر بودن هزینه در مدل فاقد محدودیت منبع گواهی بر ترکیب بجای این ویژگی با ساختار مدل است. تفاوتِ قابل توجّهی که بین هزینه‌ی هر واحد از محصول در مدل پیشنهادی و مدل زمان گرا وجود دارد نیز گویای این مطلب است که جواب‌های مسأله‌ی زمان گرا لزوماً از لحاظ هزینه بهینه نیستند.

جدول ۵. اولویت بندی مدل‌ها بر اساس معیار هزینه

مدل	میانگین رتبه	رتبه
پیشنهادی	۱,۱۰	۳
فاقد محدودیت منبع	۲,۳۰	۲
زمان گرا	۲,۶۰	۱

نتایج محاسبه‌ی شاخص‌های عملکرد نیز در جدول ۶ نمایش داده شده است. با توجّه به مقادیر این جدول، شاخص کارایی خط حاکی از درصد بسیار پایین زمان بیکاری و بهره‌برداری مؤثر از ماشین‌آلات و نیروی انسانی است. مقادیر شاخص کارایی موازنه نیز نشان می‌دهد که توزیع وظایف با سطح مطلوبی از رضایت پرسنل و فرصت‌های مضاعف برای دستیابی به ستاده‌ی بیشتر همراه است. همچنین مقادیر شاخص همواری خط، به غیر از مثال منصور که شاخص SI در سطح متوسطی قرار دارد، توزیع بسیار یکنواخت وظایف را در مراکز کاری نشان می‌دهد. بنابراین با وجودِ بالا بودن شاخص شدّت پیش‌نیازی[1] (os>۵۰) در همه‌ی مثال‌ها، می‌توان با بکار گیری

1- Order Strength Index (OS)

مدل پیشنهادی علاوه بر بهینه بودن هزینه‌ی سیستم به مقادیر مطلوبی از شاخص‌های عملکرد دست یافت.

جدول ٦. مقادیر شاخص‌های عملکرد برای مدل پیشنهادی

مثال نمونه / شاخص	منصور	جایشک	بُومن	مِرتن	مثال عددی
کارایی خط (LE)	٪۸٤	٪۸۵	٪۸۸	٪۹٤	٪۹٤
کارایی موازنه (BE)	٪۷۸	٪۸۷	٪۹٤	٪۹۳	٪۹٦
همواری خط (SI)	۲۷	۵	۸	۱	۱

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح برای مسأله‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ هزینه گرا توسعه داده شده است که امکان موازی قرار گرفتن ایستگاه‌ها، زمان-بندی وظایف و هم افزایی منابع در آن وجود دارد. همچنین ترکیب انواع مختلفی از هزینه‌ها در تابع هدف این امکان را فراهم می‌نماید تا بتوان با تغییر پارامترهای هزینه‌ای، شقوق مختلف طراحی را ارزیابی نمود و به راه حل‌های مناسب‌تری دست یافت. بنابراین در این پژوهش با پرداختن به ویژگی‌های مختلفی از خط مونتاژ سعی شده است مدلی متفاوت و با کارایی مطلوب ارائه شود که علاوه بر غنی‌سازی ادبیّات این حوزه، شکافِ بین مفروضات تحقیقات آکادمیک و آنچه در محیط‌های صنعتی واقعی رخ می‌دهد را تا حد توان کاهش دهد. همچنین توسعه‌ی روابطی که با توجّه به ساختار مدل، تعداد متغیرهای آن را کاهش می‌دهند از دیگر نوآوری‌های است که در این تحقیق ارائه شده است. علاوه بر این بررسیِ عملکرد مدل نشان می‌دهد که از یک طرف برتری مدل پیشنهادی نسبت به مدل زمان گرا در مثال‌های نمونه گواهی بر ضرورتِ توجّه به اهداف هزینه گرا در مسأله‌ی موازنه‌ی خط مونتاژ است و از طرف دیگر کاهش هزینه‌ای که از طریق توجّه به محدودیت منبع به وجود می‌آید و امیدوارانه بودن نتایج ارزیابی جواب‌های مدل با استفاده از شاخص‌های عملکرد، گواهی بر ترکیبِ بجای ویژگی‌های منتخب برای ساخت مدل تحقیق است. بنابراین با بکارگیری مدل پیشنهادی، علاوه بر پوششِ پاره‌ای از ویژگی‌هایی که در مدل‌های

هزینه‌گرا به آن‌ها پرداخته نشده است، این امکان به وجود می‌آید تا بتوان به اهداف هزینه‌ای و عملکردی خط به طور همزمان دست یافت.

از جمله مسیرهای تحقیقاتی که می‌توان به آن اشاره نمود بهبودِ روابط پیشنهادی برای کاهش تعداد متغیرها و بررسی عملکرد مدل در مثال‌هایی با ابعاد و پیچیدگی‌های متفاوت است. همچنین توسعه‌ی مدل تحقیق از طریق ترکیب آن با چیدمان نعلی شکل و توسعه‌ی رویکردی فرا ابتکاری برای کاهش زمان دستیابی به جواب مناسب برای مثال‌هایی با ابعاد بزرگ، از دیگر زمینه‌هایی است که برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود.

منابع و مآخذ

۱. موسی زادگان حسنعلی، ذگردی حسام‌الدین، "مدلی جدید برای حل مسأله موازنه‌ی خط مونتاژ هزینه‌گرا"، نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۱، جلد ۱۹، صفحه ۲۵-۱۵، ۱۳۸۷.

۲. روشنی عبدالرضا، روشنی عبدالحسن، قماشی لنگرودی عباس، "ارائه‌ی یک مدل ریاضی به منظور بالانس خط مونتاژ دو طرفه با تابع هدف هزینه‌گرا"، هفتمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی صنایع، ۱۳۸۹.

3. Scholl, A., Becker, C., "State-of-the-art exact and heuristic solution procedures for simple assembly line balancing", European Journal of Operations Research, 168, 666-693, 2006.
4. Rekiek, B., Doigui, A., Delchambre, A., Bratcu, A., "State of art of optimization methods for assembly line design", Annual Reviews in Control, 26,163-174, 2002b.
5. Ghosh, S., Gagnon, R.J.,"A Comprehensive Literature Review and Analysis of the Design, Balancing and Scheduling of Assembly Systems", International Journal of Production Research, 27, 637-670, 1989.
6. Becker, C., Scholl, A.,"A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing" European Journal of Operational Research, 168 ,694-715, 2006.
7. Baybars, I., "A survey of exact algorithms for the simple assembly line balancing problem", Management Science, 32, 909-932, 1986.
8. Buxey, G.M., Slack, N.D., Wild, R., "Production flow line system design — a review", AIIE Transactions, 5, 37-48, 1973.
9. Erel, E., Sarin, S.C., "A survey of the assembly line balancing procedures", Production Planning and Control, 9, 414-434,1998.
10. Boysen, N., Fliedner, M., Scholl, A., "Assembly line balancing: Which model to use when?", International Journal of Production Economics, 111, 509-528, 2008.
11. Amen, M., "Heuristic methods for cost-oriented assembly line balancing: A comparison on solution quality and computing time", International Journal of Production Economics, 69, 255-264, 2001.
12. Amen, M., "Heuristic methods for cost-oriented assembly line balancing: A survey", International Journal of Production Economics, 68, 1-14, 2000b.
13. Sabeti, H., Akbari, M., "Cost-Oriented U-Shaped Mixed-Model Assembly Line Balancing and Sequencing", 7th International Industrial Engineering Conference, 2009.
14. Amen, M., "An exact method for cost-oriented assembly line balancing", International Journal of Production Economics, 64, 187-195, 2000a.
15. Amen, M., "Cost-oriented assembly line balancing: Model formulations, solution difficulty, upper and lower bounds", European Journal of Operational Research, 168, 747-770, 2006.
16. Bukchin, J., Rubinovitz, J., "A weighted approach for assembly line design with station paralleling and equipment selection", IIE Transactions, 35, 73-85, 2003.

17. Bratcu, A.I., Makdessian, L., Dolgui, A., "Minimization of Equipment Cost for Transfer Lines with Blocks of Parallel Tasks", IEEE, 109-114, 2003.
18. Dolgui, A., Ihnatsenka, I., "Branch and bound algorithm for optimal design of transfer lines with multi-spindle stations", Working paper, Ecole Nationale Suoerieure des Mines, Saint-Etienne, France, 2004.
19. Dolgui, A., Ihnatsenka, I., "Balancing modular transfer lines with serial–parallel activation of spindle heads at stations", Discrete Applied Mathematics, 157, 68-89, 2009.
20. Bukchin, Y., Rabinowitch, I., "A branch-and-bound based solution approach for the mixed-model assembly line-balancing problem for minimizing stations and task duplication costs", European Journal of Operational Research, 174, 492-508, 2005.
21. Zhang ,W., Gen, M., Lin, L., "A Multi-objective Genetic Algorithm for Assembly Line Balancing Problem with Worker Allocation", IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 3026-3033, 2008.
22. Bock, S., "Using distributed search methods for balancing mixed-model assembly lines in the automotive industry", OR Spectrum, 30, 551-578, 2008.
23. Ege, Y., Azizoglu, M., Ozdemirel, N., "Assembly line balancing with station paralleling", Computers & Industrial Engineering, 57, 1218-1225, 2009.
24. Padron, M., Irizarry, M.A., Resto, P., Mejia, H.P., "A methodology for cost-oriented assembly line balancing problems", Journal of Manufacturing Technology Management, 8, 1147-1165, 2009.
25. Cakir, B., Altiparmak, F., Dengiz, B., " Multi-objective optimization of a stochastic assembly line balancing: A hybrid simulated annealing algorithm", Computers & Industrial Engineering, 60, 376-384, 2011.
26. Boysen, N., Fliedner, M., Scholl, A., "A classification of assembly line balancing problems", European Journal of Operational Research, 183, 674-693, 2007.
27. Andres, C., Miralles, C., Pastor, R., "Balancing and scheduling tasks in assembly lines with sequence-dependent setup times", European Journal of Operational Research, 187, 1212-1223, 2008.
28. Becker, C., Scholl, A., "Balancing assembly lines with variable parallel workplaces: Problem definition and effective solution procedure", European Journal of Operational Research, 199, 359-374, 2009.
29. Driscoll, J., Thilakawardana, D., "The Definition of Assembly Line Balancing Difficulty and Evaluation of Balance Solution Quality", Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 17, 81-86, 2001.