بررسی تجربی سیستم تقاضای روتـردام با استفاده از داده‌هـای مخـارج مصـرفی خـانوارهای شهری (مطالعه موردی: استان آذربایجان غربی)

میرحسین موسوی *

ابراهیم رضایی **

علیرضا هیراد ***

سیستم‌های تقاضای مصرف‌کننده بیان می‌کند که چگونه مصرف‌کننده درآمد خود را بین انواع مختلف کالاها تخصیص دهد. این مدل‌ها، معمولاً مبتنی بر تئوری‌های اقتصاد خرد هستند که طرف تقاضا را لحاظ و اطلاعات طرف عرضه را نادیده می‌گیرند. به عبارت دیگر تقاضا را مستقل از

---

* . میرحسین موسوی؛ کارشناس ارشد اقتصاد- دانشگاه علامه طباطبایی.

E. mail: mousavi@atu.ac.ir

** . ابراهیم رضایی؛ کارشناس ارشد اقتصاد- دانشگاه علامه طباطبایی.

E. mail: rezaie2002@yahoo.com

*** . علیرضا هیراد؛ کارشناس ارشد اقتصاد- دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز.

E. mail: alireza.hirad@yahoo.com

طرف عرضه، تحلیل می‌کنند. در این مقاله، ابتدا دربارهٔ ویژگیهای نظری تقاضای مصرف‌کننده و روشهای استخراج تابع تقاضا بحث شده است و در نهایت با استفاده از داده‌های مخارج خانوارهای شهری استان آذربایجان غربی، سیستم تقاضای روتردام به دو حالت مقید و غیر مقید برآورد شده است. نتایج حاکی از آن است که در هر دو حالت تئوری تقاضا در مورد گروههای کالایی صدق می‌کند و برای این که مشخص شود سیستم تقاضای روتردام با نظریه‌های تقاضا سازگار است یا نه؛ قیود همگنی و تقارن از طریق آزمون والد، آزمون شده‌است. نتایج حاکی از آن است که قید همگنی و تقارن در سیستم تقاضای روتردام تأمین می‌شود.

کلید واژه‌ها:

استان آذربایجان غربی، سیستم تقاضای روتردام، سبد مصرفی، مخارج خانوار شهری، تقاضای مصرف‌کننده، مدل اقتصادسنجی

مقدمه

موضوع تخصیص- که تقریباً همزمان با مطرح شدن اقتصاد خرد- شروع شده است، عبارت از تخصیص بهینهٔ پول معینی بین گزینه‌های مختلف می‌باشد و در معنای دوگانه آن به حداقل رساندن میزان پول مورد استفاده برای رسیدن به یک مجموعهٔ مشخصی از اهداف (مثلاً سطح مشخص از مطلوبیت) است. مدل‌های تخصیصی، نه تنها برای تقاضای مصرف‌کننده؛ بلکه برای موارد متعددی از قبیل تقاضا برای نهاده‌های تولیدی، تخصیص تقاضای واردات، توزیع سبد دارایی سرمایه گذاری و توزیع مساحت زمین‌های کشاورزی بین محصولات مختلف، فرمول بندی شده است. در همهٔ این مدل‌ها، بحث اصلی این است که براساس یک سری متغیرهای مربوطه، تابع هدف چگونه به نقطهٔ بهینه که ممکن است مقید یا نامقید باشد، می‌رسد. این بهینه یابی سیستم‌های مختلف، انحنای تابع هدف و یا فرم تبعی تابع هدف و قیدهای مربوط را مشخص می‌کند. هر چند این سیستم‌ها بر اساس تئوری اقتصادی رفتار انفرادی بنا شده؛ ولی اغلب برای رفتار کل[1] بازار و یا برای کل اقتصاد بکار گرفته می‌شود. در واقع می‌توان تجمیع رفتارهای انفرادی برای تبیین رفتار کل را با تحمیل یک سری فرضها خاص انجام داد.

هدف این مقاله بررسی ویژگیهای مجموعه مدل‌های تقاضا « ROTERDAM, AIDS, CBS, NBR » و همچنین برآورد تجربی سیستم تقاضای روتردام (به صورت مقید و غیر مقید) بر اساس داده‌های مخارج خانوارهای شهری استان آذربایجان غربی طی دوره ۱۳۸۲-۱۳۵۸ می‌باشد. در این راستا ابتدا پایه نظری تقاضای مصرف‌کننده بیان می‌شود و در ادامه، خصوصیات سیستم‌های تقاضای مذکور، تشریح شده و از لحاظ آماری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. در این تجزیه و تحلیل به آزمون قیود همگنی و تقارن سیستم‌های تقاضا پرداخته می‌شود.

[1]. Aggregation

ویژگیهای نظری تقاضای مصرف‌کننده

در این قسمت، ویژگیهای اساسی تئوری تقاضای مصرف‌کننده، بررسی می‌شود. بر اساس متون اقتصاد خرد ترجیحات مصرف‌کننده را می‌توان تحت فروض مناسبی به صورت یک تابع مطلوبیت نوشت:

$$u = u(q_i,...,q_n) \qquad (۱)$$

که در آن q، بیانگر مقدار کالا بوده و n تعداد کالاها است. این تابع برحسب مقادیر(q_iها) فزاینده بوده و اکیداً شبه مقعر است و معمولاً فرض می‌شود که دارای مشتقات اولیه و ثانویه باشد. بردار مشتقات مرتبه اول($u_q = [\partial u/\partial q_i]$) شامل n بردارِ مطلوبیت نهایی می‌باشد که به دلیل خاصیت فزایندگی u(q) برحسب $q = [q_i]$، مثبت است. ماتریس $n \times n$ مشتقات مرتبه دوم($\amalg = [\partial^2 u/\partial q \partial q']$) یک ماتریس متقارن می‌باشد. با توجه به خاصیت اکیداً شبه مقعر رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$x' \amalg x \le 0 \quad , \quad \forall x \ne 0 \quad , \quad u'_q . x = 0 \qquad (۲)$$

میزان پول مصرف‌کننده (m) غیر صفر بوده، ولی محدود می‌باشد که برای پرداخت $p_i q_i \quad \& \quad i = 1,...,n$ برای ایجاد مطلوبیت حاصل از کالاها، مورد استفاده قرارمی گیرد. p_i قیمت واحد کالای i ام است. این تخصیص پول بین مخارج کالاهای مختلف $(p_i q_i)$، بطور کامل صورت می‌گیرد؛ یعنی رابطه زیر باید برقرار باشد:

$$\sum_i p_i q_i = m \qquad (۳)$$

مسئله بهینه یابی مصرف‌کننده این است که بردار q، در بین بردارهای جایگزین، طوری انتخاب شود که سطح مطلوبیت رابطه (۱) را با توجه به محدودیت (۳) حداکثر نماید. راه حل ریاضی بهینه‌یابی بالا، شرایط مرتبهٔ اول زیر را به ما خواهد داد:

$$u_q = \lambda P \qquad (۴)$$

که در آن λ (به عنـوان ضـریب لاگرانـژ) مثبـت بـوده و $P=[p_i]$، یـک بـردار n سطری از قیمتها است. با در نظر گرفتن مجموعه معادلات (۴) و (۳) می‌توان مقادیر بهینـه q و λ را بدست آورد. از حل این دستگاه، تابع تقاضای مارشالی بدست مـی‌آیـد کـه در حالـت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q_i = f_i(m, p_1,..., p_n) \qquad \& \qquad i = 1,..., n \qquad (۵)$$

برای این که راه حل میانی برای مقادیر کالاها وجود داشته باشد، بایستی شرط اکیـداً شبه مقعر رابطهٔ (۲) به صورت $u'_q = 0$, $x' \amalg x < 0, \ \forall x \neq 0$ برقرار باشد؛ که به شبه مقعـر قوی[1] معروف است.

بعضی مواقع مشتق پذیری توابع تقاضای مارشالی (۵) مورد علاقه اقتصاد دانان اسـت چرا که بسیاری از مدل‌هایی که در عمل مورد تخمین و برآورد قرار می‌گیرند، مشتق پذیرنـد. ضمن اینکه، بهتر است بسیاری از ویژگیها و دلالتهـای تئـوری تقاضـای مصـرف‌کننـده را بـه صورت کششهای تقاضا نمایش داد که نیاز به مشتق گیری از تابع تقاضا نیز مـی‌باشـد؛ بـرای مثال شکل لگاریتمی و دیفرانسیلی رابطه (۵) را می‌توان چنین نوشت:

$$d \ln q_i = \eta_i d \ln m + \sum_j \mu_{ij} d \ln p_j \qquad i = 1,..., n \qquad (۶)$$

که در آن η_i، کشش درآمدی تقاضا برای کالای i ام و μ_{ij} کشش مقداری کـالای i ام نسبت به قیمت کالای j است. این کششها برای سازگاری با تئوری‌هـای تقاضـا بایـد یـک سری ویژگیهای خاصی داشته باشد.[2]

1. Strong Quasi-Concavity
2. Frish, (1959).

اگـر سـهم بودجـه ای بـه صـورت $w_i = \frac{p_i q_i}{m}$ باشـد. بـا توجـه بـه رابطـه (۳) بایستی $\sum_i w_i = 1$ باشد. برخی از این ویژگیها می‌تواند بر حسـب کششـهای اسلاتسـکی یـا کششهای قیمتی جبرانی، ε_{ij}، به طرز مناسبی بیان شود. کششهای قیمتـی جبرانـی، ε_{ij}، بـه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij} + \eta_i w_j \qquad (۷)$$

این کششها، با فرض ثابت نگه داشتن سطح مطلوبیت مصرف‌کننده، میزان حساسیت مصرف‌کننده نسبت به تغییرات قیمتها را می‌سنجند. برای تقاضایی که بر اساس معادلهٔ بودجهٔ (۳) بدست آمده است، شرط جمع پذیری[۱] تضمین می‌کند که:

مجموع انگل (۸-۱) $\sum_i w_i \eta_i = 1$

مجموع کورنات (۸-۲) $\sum_i w_i \mu_{ij} = -w_j$

که از جمع این دو رابطه و با استفاده از رابطه (۷) رابطه زیر برقرار خواهد بود:

مجموع اسلاتسکی (۸-۳) $\sum_i w_i \varepsilon_{ij} = 0$

ویژگی بعدی، شرط همگنی است که باید رابطهٔ (۳) برحسب m, p_i همگـن خطـی باشد:

$$\sum_j \mu_{ij} = -\eta_i \qquad (۹-۱)$$

$$\sum_j \varepsilon_{ij} = 0 \qquad (۹-۲)$$

[1]. Adding-up Conditions

یکی دیگر از خواص مهم تجربی، تقارن اسلاتسکی[1] می‌باشد:

$$w_i \varepsilon_{ij} = w_j \varepsilon_{ji} \qquad (۱۰)$$

ویژگی بعدی، شرط منفی[2] است[3]:

$$\sum_i \sum_j x_i \varepsilon_{ij} x_j < 0 \qquad x_i, x_j \neq \text{مقدار ثابت} \qquad (۱۱)$$

کششهای اسلاتسکی ممکن است ساختار خاصی از ترتیب ترجیحات و یا از تابع مطلوبیت را نشان دهند. اگر ترتیب ترجیحات بتواند توسط تابع مطلوبیتی نشان داده شود که خود آن به صورت مجموع n تابعی باشد که هر کدام از آنها تنها تابعی از یکی از کالاها باشد، در این صورت:

$$\varepsilon_{ij} = \varphi n_i (\delta_{ij} - \eta_j w_j) \qquad \text{استقلال کامل} \qquad (۱۲)$$

که در آن φ، عکس چیزی است که فریش آن را «انعطاف پذیری پولی» می‌نامد و δ_{ij} نیز دلتای کرونکر می‌باشد.[4] اگر همه کالاهای موجود در سبد مصرفی مصرف‌کننده بر حسب گروههای غیر تداخلی طبقه بندی شود و تابع مطلوبیت نیز به صورت یک تابعی از توابع مطلوبیت جدایی پذیر برای هر گروه باشد، در این صورت چنانچه کالای i، یک بخشی از گروه f باشد و کالای j متعلق به گروه G بوده و $F \neq G$ باشد، خواهیم داشت؛

$$\varepsilon_{ij} = -\varphi_{FG} \eta_i \eta_j w_j \qquad \text{جدایی پذیر ضعیف} \qquad (۱۳)$$

---

1. Slutsky Symmetry
2. Negativity Condition

3. برای مطالعهٔ بیشتر به کتاب:

A.S. Deaton, and J. Muellbauer, "Economics and Consumer Behavior", (Cambridge University press, 1980), pp.43-46.

4. یک کاهش پارامتر اضافی است که با بسیاری از الگوهای دارای کنش و واکنش چسبنده متناظر می‌باشد و به وسیلهٔ جمع‌پذیری مطلوبیت نیز نشان داده می‌شود.

که در آن برای همهٔ تقاطع‌های بین کالاهای گـروه F و G، $\varphi_{FG} = \varphi_{GF}$ مـی‌باشـد. خاصیت (۱۳) جدایی پذیری ضعیف را نشان می‌دهد. برای جدایی پذیری قوی درگروهها، باید در رابطهٔ (۱۳) رابطهٔ $\varphi_{FG} = \varphi$ وجود داشته باشد؛ یعنی برای جدایی پذیری قـوی، بایسـتی همهٔ تقاطعهای گروهی یکسان باشد. واضح است که اگرهمهٔ گروهها در برگیرندهٔ فقط و فقـط یک کالا باشد، در آن صورت یکی از حالتهای استقلال کامل برقرار خواهد بود.

جدایی‌پذیری، در کارهای عملی بسیار مفید است؛ زیرا اجـازه مـی‌دهـد کـه سیسـتم تخصیصی هر گروه با فرض مشخص بودن پول‌هایی که برای این گروهها خرج می‌شود، بطـور کاملاً جداگانه ای فرمول بندی شود. تخصیص پول در میان گروههای کالایی در یک مدل بـا سطح بالاتری از تخصیص، فقط بر حسب ویژگیهای گروهها تعیین می‌شود. ترجیحات همگـن خودش بیانگر این خاصیت است که:

$$\eta_i = 1 \qquad , \forall i \tag{۱۴}$$

که نشان دهنده آن است که سـهم بودجـه ای کـالای i ام بـا تغییـر در آمـد، تغییـر نمی‌کند. مفهوم دیگری که مفید بودن آن ثابت شده است، تابع مطلوبیت غیر مستقیم است:

$$u^* = u(m, p_1, ..., p_n) \tag{۱۵}$$

که با جای‌گذاری q_i از رابطه (۵) در رابطه (۱)، بدست می‌آید و فرم دیفرانسـیلی آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} du^* &= \sum_i (\partial u/\partial q_i)\left[(\partial f_i/\partial m)dm + \sum (\partial f_i/\partial p_j)dp_j\right] \\ &= \lambda m\left(\sum_i w_i\eta_i d\ln m + \sum_i\sum_j w_i\mu_{ij} d\ln p_j\right) \\ &= \lambda m\left(d\ln m + \sum_j w_j d\ln p_j\right) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن از شرط مرتبه اول (۴) و شرایط جمع پذیری (۸-۱) و (۸-۲) استفاده شده است. این رابطه نشان می‌دهد که ضریب لاگرانژینی رابطه (۴)، λ، همان مطلوبیت نهایی بودجه، $\partial u^{*}/\partial m$ می‌باشد. از معادله (۱۶) می‌توان توابع تقاضا را با استفاده از قانون روی بدست آورد.

$$q_i = -(m/p_i)\left(\frac{\partial u^{*}}{\partial \ln p_i}\bigg/\frac{\partial u^{*}}{\partial \ln m}\right) \tag{۱۷}$$

در معادله (۱۶)، $d \ln m + \sum_j w_j d \ln p_j$ می‌تواند به عنوان نوعی از تغییرات درآمد واقعی در نظر گرفته شود. $\sum_j w_j d \ln p_j$ تغییر در شاخص قیمت است که برای تعدیل m، مورد استفاده قرار می‌گیرد. ثابت بودن در آمد واقعی به معنی عدم تغییرات مطلوبیت است. روش دیگر برای بررسی مفهوم در آمد واقعی این است که از دیفرانسیل لگاریتمی معادله بودجه (۳) شروع شود:

$$d \ln m = \sum_j w_j d \ln p_j + \sum_j w_j d \ln q_j \tag{۱۸}$$

می‌توان نوشت:

$$\sum_j w_j d \ln q_j = d \ln m - \sum_j w_j d \ln p_j \tag{۱۹}$$

که در آن متغیر طرف چپ؛ یعنی تغییر در مقدار، متناظر با تغییر درآمد واقعی طرف راست می‌باشد و در نتیجه از علائم زیر استفاده می‌شود.

$$d \ln Q = \sum_j w_j d \ln q_j \qquad \& \qquad d \ln P = \sum_j w_j d \ln p_j \tag{۲۰}$$

که نشان‌دهندهٔ شاخص مقداری و قیمتی دیویزیا بوده و با جای‌گـذاری آن در رابطـهٔ (۱۸) خواهیم داشت:

$$d \ln m = d \ln P + d \ln Q \qquad (۲۱)$$

مفهوم دیگری که در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع مخارج اسـت کـه اگـر در رابطهٔ (۱۵)، m برحسب u و p بیان شود:

$$m = e(u, p_1,..., p_n) \qquad (۲۲)$$

که این رابطه، حداقل مخارج مورد نیاز بـرای رسـیدن بـه سـطح مطلوبیـت (u) را بـا قیمتهای مشخص $p_1,..., p_n$ نشان می‌دهد. از رابطه (۱۶) فرم دیفرانسیلی آن را می‌توان بـه صورت زیر نوشت:

$$d \ln e = [1/(\lambda m)][du + \sum_j w_j d \ln p_j] \qquad (۲۳)$$

که به عنوان پایه ای برای فرمول شفارد مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$w_i = \frac{\partial \ln e}{\partial \ln p_j} \qquad i = 1,..., n \qquad (۲۴)$$

که معادلهٔ تقاضای نوع هیکسی را می‌دهد و به صورت زیر است:

$$q_i = h_i(u, p_1,..., p_n) \qquad i = 1,..., n \qquad (۲۵)$$

اگر u با استفاده از $u^*(m, p_1,..., p_n)$ در معادله (۲۵) جـای‌گـذاری شـود، دوبـاره معادلات تقاضای مارشالی (۵) بدست می‌آید.

روش دیگر برای نشان دادن ارتباط بین این دو نوع معادلات تقاضا، ایـن اسـت کـه از رابطه (۶) شروع کرده و با استفاده از (۷) و (۱۶) رابطهٔ زیر بدست آید:

$$d \ln q_i = \left[1/(\lambda m)\right]\eta_i du + \sum_j \varepsilon_{ij} d \ln p_j \qquad (۲۶)$$

که شکل دیفرانسیل لگاریتمی رابطه (۲۵) است. از این عبارت، ماهیت ε_{ij} به عنـوان کششهای قیمتی ثابت مطلوبیت به روشنی دیده می‌شود.

روشهای استخراج توابع تقاضا

در اقتصادسنجی، تصریح ایده آل آن است که با تئوری‌هـای اقتصـادی سـازگار بـوده، تخمین آن آسان و مناسب با داده‌هـای مشـاهده شـده، باشـد تـا بتوانـد بـا خطـای کمتـری پیش‌بینی کند. در انتخاب مدل، بایستی بین این سه خصوصیت یـک تعـادل منطقـی برقـرار باشد. در فرمول بندی سیستم تخصیصی مصرف‌کننـده، معـادلات تقاضـا بایسـتی بـا خـواص مطرح شده در بخش قبلی سازگار باشد. اگرچـه ایـن خـواص بـرای مصـرف کننـدهٔ انفـرادی استخراج شده؛ ولی برای متوسط یا کل کارگزاران نیز می‌تواند به خوبی برقرار باشد. بطور کلی روش‌های مختلف استخراج تابع تقاضا را می‌توان در چهـار روش بـرای رسـیدن بـه معـادلات تقاضای تأمین کنندهٔ خواص بررسی شده در بخش قبلی طبقه بندی نمود:

روش نخست: استخراج معادلات تقاضا را با تصـریح فـرم تبعـی تـابع مطلوبیـت بـه صورت یک تابع شبه مقعر قوی و فزاینده آغاز می‌کند. سپس بـا توجـه بـه قیـد بودجـهٔ (۳)، روابط حداکثرکننده تابع مطلوبیت را بدست می‌آورد. برای ایـن کـار، بـا اسـتفاده از معـادلات شرط مرتبهٔ اول، مقادیر q را به عنوان تابعی از قیمت و درآمد حلّ می‌نماید؛ که همـان توابـع تقاضا را به ما می‌دهد. در این روش پارامترهای تابع مطلوبیت، بـا معـادلات تقاضـای بدسـت آمده سازگار است.

بهترین مثال این روش، سیستم مخارج خطی[1] (LES) اسـت. در ایـن سیسـتم، تـابع پایه‌ای مطلوبیت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u = \sum_i \beta_i \ \ell n(q_i - \gamma_i) \quad , \quad \sum_j \beta_j = 1 \quad , \quad \gamma_i < q_i \qquad (۲۷)$$

معادلات نتیجه شده از این تابع تقاضا، عبارت است از :

$$q_i = \gamma_i + (\beta_i / p_i)(m - \sum_j p_j \gamma_j) \qquad (۲۸)$$

خاصیت جمع پذیری رابطهٔ (۲۷) فرض استقلال کامل ترتیب ترجیحات را بطور واضح نشان می‌دهد. این تابع تقاضا به لحاظ تجربی، به نسبت محدودکننده بوده و تخمـین آن نیـز آسان نیست؛ چرا که در رابطهٔ (۲۸)، γ_j در همهٔ معادلات به صورت غیر خطی با β_i ظـاهر شده است، ضمن اینکه γ_i تخمین زده شده، بایستی کمتر از کوچکترین مشاهدهٔ مقـدار q_i باشد که به راحتی توسط داده‌ها، قابل مشاهده نمی باشد. سیستم معادلات تقاضا، برای اولین بار- نه به صورت ایده‌آل- توسط «استون»[2] تخمین زده شده اسـت و تخمـین مناسـب آن تـا زمان «پارکز»[3] و «سولاری»[4] به طول انجامید. بطور کلی، واضح است که شـروع از یـک تـابع مطلوبیت کاملاً تصریح شده، نمی تواند تابع تقاضای جالبی را نتیجه دهد.

روش دوم: با تصریح فرم تبعی یک تابع مطلوبیت غیرمسـتقیم شـروع مـی‌کنـد و از قانون روی برای رسیدن به تابع تقاضای قابل تخمین استفاده می‌نماید؛ مثال بـارز ایـن روش، تابع مطلوبیت غیر مستقیم ترانسلوگ اسـت کـه توسـط «کریسـتین سـن و دیگـران»[5] ارائـه شده‌است.

---

1. Linear Expenditure System
2. Ston (1954).
3. Parks (1971).
4. Solari (1971).
5. Christensen and other

$$u^{*} = \alpha + \sum_{i} \beta_i \, \ell n(p_j \big/ m) + 1/2 \sum_{i} \sum_{j} \beta_{ij} \, \ell n(p_i /m) \, \ell n(p_j /m) \qquad (۲۹)$$

که با در نظر گرفتن $\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad \& \quad \sum_{i} \beta_i = -1$، چنین نتیجه‌گیری می‌شود:

$$w_i = \frac{\beta_i + \sum_{j} \beta_{ij} \;\; \ell n(p_j /m)}{-1 + \sum_{k} \sum_{j} \beta_{kj} \, \ell n(p_k /m)} \qquad (۳۰)$$

این سیستم نیز بر حسب پارامترهایش غیر خطی بوده و تخمین آن نیز آسان نیست. علاوه براین، تأمین این شرط نیز غیر ممکن است که u^{*} بر حسب m بطور یکنواخت افزایشی باشد یا بر حسب سطح عمومی قیمت، برای همهٔ مقادیر ممکن قیمتها و m کاهشی باشد. این راه برای کارهای پیش‌بینی و شبیه‌سازی امکان‌پذیر نمی‌باشد. همچنین احتمال اینکه مقدار پیش بینی سهم مقادیر منفی باشد، وجود دارد. کشش درآمدی، η_i، مربوط به (۳۰) عبارت است از:

$$\eta_i = 1 - (\sum_{j} \beta_{ij} \big/ w_i - \sum_{k} \sum_{j} \beta_{kj}\,)\,/\,x \qquad (۳۱)$$

که در آن x همان مخرج (۳۰) است. برای کشش اسلاتسکی، ε_{ij}، نیز حاصل ضرب آن در w_i چنین خواهد شد:

$$w_i \varepsilon_{ij} = (\beta_{ij} - w_i \sum_{k} \beta_{ik} + w_i w_j \sum_{k} \sum_{i} \beta_{kl}\,)\,/\,x \qquad (۳۲)$$

که شرایط مجموع اسلاتسکی (۸-۱)، شرایط همگنی (۹-۲) و شرایط متقارن (10) را تأمین می‌کند. ولی کنترل علامت β_{ij} نمی تواند شرط منفی (۱۱) را تضمین سازد. از طرف

دیگر، اگر شرایط جداپذیری (۱۲) یا (۱۳) را با رابطهٔ (۳۱) ایـن تـابع تقاضـا مقایسـه کنـیم، آشکار می‌شود که ایجاد یک تابع مطلوبیت مستقیم جداپذیر از این تابع تقاضای بدست آمـده (۳۰)، کار به نسبت پیچیده‌ای است. سیســتم بـا قـرار دادن $\sum_j \beta_{ij} = 0$ بـرای همـهٔ iهـا، همگن می‌شود. این خاصیت می‌تواند به سیستم، تحمیل یـا آزمـون شـود و یـا هـر دو بـدون تغییرات اساسی در تصریح تابع بوجود آید.

روش سوم: بر اساس تصریح تابع مخارج (۲۲) است. با بکارگیری لم شفارد، معادلات تقاضای هیکسی به عنوان تابعی از سطح مطلوبیت (غیرقابـل مشـاهده) بدسـت مـی‌آیـد کـه می‌توان بجای سطح مطلوبیت، معادل آن را بر حسب مقادیر p, m جای‌گذاری کرده و آن را از توابع تقاضا حذف نمود؛ بهترین مثال ایـن نـوع از تصـریح، سیســتم تقاضـای تقریبـاً ایـده آل[1] (AIDS) است. در سیستم تقاضای AIDS، برای استخراج معادلات تقاضـا، از یـک تـابع مخارج مصرف‌کننده e(u,p) به شکل PIGLOG استفاده می‌شود. تـابع PIGLOG عبـارت است از:

$$\ln e(u, p) = (1-u).\ln\{a(p)\} + (u).\ln\{b(p)\} \qquad (۳۳)$$

در این رابطه، فرض بر آن است کـه u بـین صـفر و ۱ باشـد کـه" صـفر" زنـدگی در حداقل معیشت و «یک» بیانگر حد اعلای لذت از زندگی را نشان می‌دهد. a(p) نشان‌دهنـدهٔ هزینهٔ معیشت و b(p) نشان‌دهندهٔ هزینهٔ رفاه است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\ln a(p) = a_0 + \sum_k a_k.\ln p_k + 1/2 \sum_k \sum_j \gamma_{kj}{}^*.\ln p_k.\ln p_j \qquad (۳۴)$$

$$\ln b(p) = \ln a(p) + \beta_0 \prod_k p_k{}^{\beta_k} \qquad (۳۵)$$

[1]. Almost Ideal Demand System

بنابراین رابطۀ هزینۀ سیستم AIDS به صورت زیر خواهد بود.

(۳۶)

$$\ln e(u,p) = a_0 + \sum_k a_k.\ln p_k + 1/2\sum_k\sum_j \gamma_{kj}^{*}.\ln p_k.\ln p_j + u.\beta_0.\prod_k p_k^{\beta_k}$$

که در آن α_i & β_i , γ^* پارامتر هستند. به راحتی می‌توان بررسی کرد که e(u,p) بر حسب p همگن خطی می‌باشد. اگر داشته باشیم:

$$\sum_i \alpha_i = 1 \quad , \sum_j \gamma_{kj}^{*} = \sum_k \gamma^{*}_{kj} = \sum_j \beta_j = 0$$

با استفاده از لم شفارد، می‌توان از تابع e(u,p)، تقاضای کالاهای مختلف را استخراج کرد. براساس لم شفارد رابطۀ $\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i} = q_i$ است که اگر طرفین در $\frac{p_i}{e(u,p)}$ ضرب شود، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \ln e(u,p)}{\partial \ln p_i} = \frac{p_i q_i}{e(u,p)} = w_i \qquad (۳۷)$$

که در آن w_i سهم بودجه ای کالای i ام است. بنابراین اگر از رابطۀ (۳۶) به صورت لگاریتمی مشتق گرفته شود، در آن صورت، طرف راست w_i را می‌دهد؛

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i.u.\beta_0 \prod p_k^{\beta_k} \qquad (۳۸)$$

که در آن:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij}^{*} + \gamma_{ji}^{*}) \qquad (۳۹)$$

از دید مصرف‌کنندهٔ حداکثر کنندهٔ مطلوبیت، کل مخارج m برابر با e(u,p) اســت و این برابری می‌تواندu را به صورت تابعی از p و m بدهد که همان تابع غیر مستقیم است. اگر این کار برای تابع (۳۶) انجام و در (۳۸) جای‌گذاری گـردد، آنگـاه سـهم مخـارج کـالای i ام، تابعی از p و m بدست می‌آید:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln \{m/P\} \quad (۴۰)$$

که درآن:

$$\ln P = a_0 + \sum_k a_k . \ln p_k + 1/2 \sum_j \sum_k \gamma_{kj} . \ln p_k . \ln p_j \quad (۴۱)$$

به این تابع، تقاضای AIDS به شکل سـهم بودجـه ای آن گفتـه مـی‌شـود کـه در آن روابط زیر برقرار است:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \;, \; \sum_i \gamma_{ij} = 0 \;, \; \sum_i \beta_i = 0 \quad (۴۲)$$

$$\sum_j \gamma_{ij} = 0 \quad (۴۳)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad (۴۴)$$

سیستم AIDS به راحتی قابل تفسیر است. این سیستم نشان می‌دهد که در صورت نبود تغییر قیمتهای نسبی و درآمدهای واقعی (مخارج واقعی)، سهم مخارج کالای مـورد نظـر نیز ثابت باقی می‌ماند. تغییر در مخارج واقعی از طریق β_iها و تغییـر در قیمتهـای نسـبی از طریق α_iها بر سهم مخارج کالا اثر می‌گذارد. β_i هـا بـرای کالاهـای لـوکس مثبـت و بـرای

کالاهای ضروری منفی و جمع آنها صفر است. همچنین می‌توان نشان داد که سیستم معادلات AIDS برای کل جامعه قابل تعمیم است.[۱]

نکته مهم این سیستم آن است که با توجه به شاخص قیمت P معادله فوق بر حسب ضرایب غیر خطی بوده و سیستم تقاضای تقریباً ایده آل غیرخطی[۲] (NAIDS) را تشکیل می‌دهد و برای برآورد ضرایب، به استفاده از روشهای غیرخطی نیز نیاز می‌باشد که این موضوع خود نیازمند داشتن اطلاعات و آمار کافی است. در بیشتر مطالعات تجربی به جای استفاده از شاخص واقعی P و روش غیرخطی از شاخص استون به عنوان جانشینی برای شاخص واقعی P استفاده شده و با این عمل، مدل به صورت سیستم تقاضای تقریباً ایده آل خطی[۳] (LAIDS) درآمده و توابع تقاضا به صورت توابعی خطی از قیمتها و مخارج کل تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از روشهای خطی، برآورد نمود. دیتون و مولبار برای تبدیل سیستم تقاضای خودشان به یک سیستم خطی، شاخص استون را به صورت زیر معرفی کردند:

$$\log P = \sum_k w_k \log P_k \qquad (۴۴)$$

کششهای درآمدی $\eta^1{}_i$ و قیمتی خودی $\mu^1{}_{ii}$ و قیمتی متقاطع $\mu^1{}_{ij}$ سیستم تقاضای LAIDS به صورت زیر محاسبه می‌شود[۴].

$$\eta^1{}_i = \frac{\beta^1{}_i}{w_i} + 1 \qquad (۴۶)$$

---

[۱]. برای مطالعه بیشتر ر. ک. به مقالهٔ:

A.S. Deaton, and J. Muellbur, "An Almost Ideal Demand System", ***American Economic Review*** 70(3), (1980), pp.312-26.

[2]. Nonlinear Almost Ideal Demand System (NAIDS)

[3]. Linear Almost Ideal Demand System (LAIDS)

[۴]. اندیس بالایی ۱ نشان دهندهٔ خطی بودن سیستم تقاضای تقریباً ایده آل است.

$$\mu^{1}{}_{ii} = \frac{\gamma^{1}{}_{ii}}{w_i} - 1 \qquad (۴۷)$$

$$\mu^{1}{}_{ii} = \frac{\gamma^{1}{}_{ij}}{w_i} \qquad (۴۸)$$

می‌توان نشان داد کشش درآمدی η_i و قیمتی خودی μ_{ii} و قیمتی متقاطع μ_{ij} سیستم تقاضای NAIDS عبارت است از:

$$\eta_i = \frac{\beta_i}{w_i} + 1 \qquad (۴۹)$$

$$\mu_{ii} = \frac{\gamma_{ii}}{w_i} - 1 - \beta_i \qquad (۵۰)$$

$$\mu_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{w_i} - \beta_i \left(w_j / w_i\right) \qquad (۵۱)$$

روش چهارم: بسیاری از مطالعات تجربی اخیر تقاضا، با توجه به تصریح لگاریتم دو طرفه و کشش ثابت انجام یافته است. این مطالعات به لحاظ تجربی، نتایج خوبی را نشان می‌دهند؛ اما به لحاظ قیود تئوریکی- که در بخش قبلی بیان شد- مناسب نمی‌باشند. همان طور که بیان شد به غیر از قید همگنی، این قیدها را می‌توان بر اساس کششها بیان کرد. تأمین این خواص کششهای ثابت، مستلزم سهم بودجه ای ثابت می‌باشد که به لحاظ تئوریکی جالب نبوده و به لحاظ تجربی نیز غیر قابل قبول است. تایل (۱۹۶۵) با یک تصریح از لگاریتم دو طرفه مانند (۶) شروع کرد که در آن μ_{ij} با استفاده از رابطهٔ (۶) توسط ε_{ij} جای‌گذاری شده بود.

$$d \ln q_i = \eta_i \,(d \ln m - \sum_j w_i \, d \ln p_j) + \sum_j \varepsilon_{ij} d \ln p_j$$

با ضرب طرفین در w_i خواهیم داشت:

$$w_i .d \ln q_i = b_i (d \ln m - \sum_j w_i d \ln p_j) + \sum_j s_{ij} d \ln p_j \qquad (۵۲)$$

که در آن $b_i = w_i .\eta_i \quad \& \quad s_{ij} = w_i .\varepsilon_{ij}$ به عنوان یک مقدار ثابت عمل می‌کنند. این انتخاب ثابت‌ها با عنوان سیستم روتردام[1] معروف است. در یک بازبینی، مجموع انگل و اسلاتسکی نشان می‌دهد که:

$$\sum_i b_i = 1 \qquad \sum_i s_{ij} = 0 \qquad (۵۳)$$

در حالیکه شرط همگنی از طریق رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_j s_{ij} = 0 \qquad (۵۴)$$

و شرط تقارن (۱۰) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$s_{ij} = s_{ji} \qquad (۵۵)$$

شرط منفی نیمه معین بودن نیز چنین خواهد بود:

$$\sum_i \sum_j x_i s_{ij} x_j < 0 \qquad x_i , x_j \neq cons \tan t \qquad (۵۶)$$

[1]. Rotterdam System

همهٔ این شرایط بر حسب ثابت‌های سیستم بوده و می‌تواند یـا آزمـون شـود و یـا بـر سیستم تحمیل گردد. ویژگی جـذاب دیگـر ایـن انتخـاب از پارامترهـا آن اسـت کـه سـاختار ترجیحات خاص، حالتهای خاصی دارد. برای استقلال کامل باید:

$$s_{ij} = \varphi . b_i (\delta_{ij} - b_j) \qquad (۵۷)$$

در حالیکه برای جدا سازی ضعیف بدین گونه بیان می‌شود:

$$s_{ij} = \varphi_{FG} . b_i b_j \qquad (۵۸)$$

که در آن i وj به ترتیب به گروههای F و G تعلق دارد و برای جـایگزینی قـوی نیـز φ_{ij} بوسیلهٔ φ جایگزین می‌شود.

از آنجا که $\eta_i = b_i / w_i$ است، همگنی می‌توانـد فقـط از طریـق تحمیـل $b_i = w_i$ برای همهٔ i ها بدست آید؛ یعنی از طریق ثابت ساختن w_i نسبت به تغییرات قیمت حاصـل می‌شود.

این مدل با توجه به این مسئله که عکس العمل متقابل i و j توسـط s_{ij} نشـان داده می‌شود، یک حالت عمومی است. با توجه به $\eta_i = b_i / w_i$، علامت η_i از طریـق b_i تعیـین می‌شود. یک کالای تخمـین زده شـده ممکـن اسـت پسـت $(b_i < 0 \quad , \quad \eta_i < 0)$ و یـا غیر پست $(b_i \geq 0 \quad , \quad \eta_i \geq 0)$ باشد. در حالت دوم، کالا مـی‌توانـد یـک کـالای نرمـال $(b_i \leq w_i \ \& \ \eta_i \leq 1)$ یا یک کالای لوکس $(b_i > w_i \ \& \ \eta_i > 1)$ باشد. کالا می‌تواند بـا تغییرات w_i از لوکس تا نرمال و یا بر عکس تغییر کند. یک کالا نمـی توانـد از یـک کـالای غیر پست تا یک کالای پست تغییر کند. از رابطهٔ (۴۶) می‌توان نتیجه گرفت که علامـت β_i تعیین‌کنندهٔ آن است که η_i بزرگتر از دیگری است یا نه. یک کالا یا لوکس است یا ضـروری؛ بدون اینکه امکان تغییر آن از طریق یک متغییر برونزا امکان پذیر باشد. اگر کـالایی ضـروری است می‌تواند از کالای نرمال تا کالای پست تغییر کند و یا برعکس. هـر مقـدار ثابـت b_i از

سیستم روتردام و β_i از سیستم *AIDS* برای مقید بودن ظاهر می‌شوند. آیا ممکن است یـک تصریح، طوری انجام شود که کالا از یک چرخهٔ زندگی اقتصادی بگذرد؛ یعنی در ابتدا لوکس، سپس نرمال و در نهایت پست شود. با سطح معمولی از تجمیع یک کـالای پسـت، بـه نـدرت قابل مشاهده می‌باشد؛ اگر چه کاهش اهمّیت عملی آن محدودیت ثابت b_i است.

از چهار روش بررسی شده؛ روش اول (که از یک تابع مطلوبیـت مسـتقیم بـه صـورت مخصوص فرمول بندی شد) حداقل جذابیت را دارد؛ زیرا به یک سیستم تقاضای جالب منجر نمی شود.

خانواده توابع تقاضای دیفرانسیلی[1]

مدل روتردام (۵۲) را با استفاده از (۱۹) و (۲۰) می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$w_i .d \ln q_i = b_i .d \ln Q + \sum_j s_{ij} \ln p_j \tag{۵۹}$$

این در واقع یکـی از چهـار مـدل مـورد بررسـی در قسـمت قبـل اسـت. حـال مـدل *AIDS* رابطهٔ (۴۰) را در نظر بگیرید که به فرم دیفرانسیلی است. اگر به جای $d \ln P^*$ رابطهٔ (۴۰)، $d \ln P$ رابطهٔ (۲۰) جای‌گذاری شود با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) خواهیم داشت؛

$$dw_i = \beta_i .d \ln Q + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j \tag{۶۰}$$

اگر به روابط (۵۹) و (۶۰) توجه شود طرف راست هر دو خیلی شبیه استو طرف چپ آن متفاوت می‌باشد؛ ولی در هر صورت به یکدیگر مرتبط هستند. در واقع می‌توان نوشت:

$$dw_i = w_i .d \ln q_i + w_i .d \ln p_i - w_i .d \ln m \tag{۶۱}$$

---
[1]. A Class of Differential Demand Function

نشان می‌دهد که $w_i.d\ln q_i$ جزء مقداری تغییر سهم بودجه ای، w_i، است؛ در حالی که $w_i.d\ln p_i$ و $-w_i.d\ln m$ مربوط به تغییرات برونزا در قیمت و پول می‌باشد. می‌توان با استفاده از مدل (۶۱) نشان داد که چطور ضرایب (۵۹) و (۶۰) به هم مرتبط هستند. با جای‌گذاری $w_i.d\ln q_i$ در رابطه (۶۱) طرف راست (۵۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} dw_i &= b_i.d\ln Q + \sum\nolimits_j s_{ij} d\ln p_j + w_i d\ln p_i - w_i d\ln m \\ &= (b_i - w_i) d\ln Q + \sum\nolimits_j (s_{ij} + w_i\delta_{ij} - w_i w_j) d\ln p_j \end{aligned} \qquad (۶۲)$$

که در آن از روابط (۲۰) و (۲۱) برای جای‌گذاری در $d\ln m$ استفاده شده است. مقایسه با رابطهٔ (۶۰) نشان می‌دهد که معادل آن عبارت است از:

$$\begin{aligned} \beta_i &= b_i - w_i \\ \gamma_{ij} &= s_{ij} + w_i\delta_{ij} - w_i w_j \end{aligned} \qquad (۶۳)$$

متغیر در نظر گرفتن w_i و ثابت در نظر گرفتن s_{ij}, b_i تفاوت اصلی ثابت در نظر گرفتن β_i, γ_{ij} است، در واقع دو سیستم در عین متفاوت بودن، قابل مقایسه می‌باشند.

سیستم‌های تقاضای CBS, NBR

بنیانهای نظری این سیستم توسط «دریل و کلر»[1] پایه‌گذاری شد و بعدها توسط افرادی مانند(بارتن[2]), (ذیلنبرگ، نداال و دریل[3])، (فیلیپ جی، دس چامپس[4]) و ...مورد پی‌گیری قرار گرفت.

1. Driel & Keller(1985)
2. Barten,(1989-1993).
3. Driel, Nadall & Zeelenberg ,1997.
4. Philippe J. Deschamps (1997, 2000).

دریل و کلر (۱۹۸۵) از ادارۀ مرکزی آمار هلند[1] (CBS) یک مدل دو رگه یا ترکیبی را از سیستم تقاضای تقریباً ایده آل دیتون و مولبار و سیستم تقاضای روتردام (Theil,1975) با استفاده از جایگزین کردن $\beta_i + w_i$ به جای b_i در رابطۀ (۵۹)، و جابجا کردن $w_i d \ln Q$ به سمت چپ ایجاد کردند. نتیجۀ چنین سیستمی (CBS) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w_i (d \ln q_i - \ln Q) = \beta_i d \ln Q + \sum_j s_{ij} d \ln p_j$$
$$w_i (d \ln q_i / Q) = \beta_i d \ln Q + \sum_j s_{ij} d \ln p_j \qquad (۶۴)$$

که در آن پارامترهای β_i & s_{ij} ثابت فرض شده و q_i مقدار تقاضای کالای iام و p_j قیمت کالای jام می‌باشد. Q کل مخارج واقعی بوده و به صورت رابطۀ زیر تعریف می‌شود:

$$d \log Q = \sum_{j=1}^{n} w_j \, d \log q_j = d \log m - \sum_{j=1}^{n} w_j \, d \log p_j \qquad (۶۵)$$

در این رابطۀ m ارزش کل مخارج بوده و $w_i = p_i q_i / m$ سهم بودجه ای کالای iام و n نیز تعداد کالاها است. ضرایب قیمتها، s_{ij}، نیز ضرایب اسلاتسکی نامیده می‌شود. کشش درآمدی η_i و کشش قیمتی جبران نشده η_{ij} کالای i ام نسبت به قیمت کالای j ام عبارتند از:

$$\eta_i = \frac{\beta_i}{w_i} - 1 \qquad (۶۶)$$

$$\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{w_i} - \eta_i w_j \qquad (۶۷)$$

1. Dutch Central Bureau of Statistics(CBS)

مدل (CBS) در رابطه (۶۴) به شکل دیفرانسیلی بیان شده است که برای رسیدن به معادلات قابل تخمین، بایستی به تغییرات محدود تبدیل شوند. می‌توان از روش تایل برای مدل روتردام استفاده کرد که اصولاً یک کاربرد از قاعدهٔ ذوزنقه ای[1] می‌باشد. برای سهم بودجه ای از میانگین وزن دو دوره استفاده می‌شود:

$$\overline{w}_{it} = \left(w_{i,t-1} + w_{i,t}\right)/2 \qquad (۶۸)$$

و اپراتور دیفرانسیلی لگاریتمی D به صورت زیر خواهد بود:

$$Dy_t = \ln y_t - \ln y_{t-1} \qquad t = 2,\ldots,T \qquad (۶۹)$$

عبارت تغییرات محدود بعد از وارد کردن جملهٔ اختلال ε_{it} به صورت زیر خواهد بود:

$$\overline{w_{it}} D \frac{q_{it}}{Qt} = \beta_i DQ_t + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} Dp_j + \varepsilon_{it} \qquad (۷۰)$$

که در آن DQ_t به صورت $\sum_j \overline{w}_{jt} Dq_{it}$ محاسبه می‌شود که جمع پذیری را تضمین می‌کند.

مدل CBS معرفی شده یک معادلهٔ اقتصاد خرد برای خانوار انفرادی است. این مدل یک سیستم تقاضای دیفرانسیلی است که برای اندازه گیری اثر تغییرات قیمت و مخارج کل روی سهم بودجه ای کالاهای مختلف بکار می‌رود. بنابراین این شکل از مدل برای تحلیل‌های سری زمانی، مناسب است. برای تحلیل‌های اطلاعات مقطعی مدل تقاضا بهتر است

[1]. Trapezoid Rule

بجای تفاضلی یا دیفرانسیلی به صورت سطح باشد. این کار توسط دریل (۱۹۸۲) و «دریل، نادال و زیلنبرگ»[۱] مورد بررسی قرار گرفته است.[۲]

این سیستم شامل ضرایب درآمدی $AIDS$، c_i، و ضرایب قیمتی روتردام، s_{ij}، می‌باشد. این ضرایب فقط دو مدل پایه ای را در شرایط جمع‌پذیری و همگنی و تقارن بر حسب تنها ضرایب شریک می‌کند. مدل را می‌توان بر اساس شرط منفی نیز ساخت؛ به عبارت دیگر این شرط را می‌توان بر مدل تحمیل کرد. مطابق روابط (۴۶) و (۴۷) b_i بجای c_i ظاهر شده است. استقلال کامل، جدایی پذیری ضعیف و قوی، حالت‌های خاص از این تصریح نیست.

«نوس»[۳] یک مدل دورگهٔ دیگری را بنام NBR، مورد بررسی قرار داد. او در سیستم تقاضای $AIDS$ (۴۹) $b_i - w_i$ را جایگزین c_i کرد و سیستم تقاضای NBR را به صورت زیر بدست آورد:

$$dw_i + w_i d \ln Q = b_i d \ln Q + \sum_j r_{ij} d \ln p_j \qquad (۷۱)$$

این سیستم، ضرایب درآمدی روتردام و ضرایب قیمتی $AIDS$ را ثابت درنظر می‌گیرد. این مدل نیز شرایط قانون جمع پذیری، همگن و تقارن را تأمین می‌کند؛ اما شرط منفی را نمی تواند تأمین کند ضمن اینکه ساختار ترجیحات مخصوص، نمی تواند به وسیلهٔ انتخاب ثابت‌ها جاسازی شود.

طرف راست سیستم‌های چهارگانه، شامل متغیرهای یکسان؛ ولی طرف چپ متفاوت است. اگر طرف چپ سیستم‌های روتردام (۵۹)، سیستم CBS (۶۴)، سیستم $AIDS$ (۶۰) و

---

[1]. Driel, Nadall & Zeelenberg, (1997).

[۲]. برای اطلاعات بیشتر ر. ک. به مقالهٔ :

Hans Van Driel, Venuta & Kees Zeelenberg, "The Demand For Food In The United States And The Netherlands: A Systems Approach with the CBS Model", ***Journal of Applied Econometrics***, Vol. 12, (1997), pp.509-532.

[3]. Neves, (1987).

سیستم NBR (۷۱) به ترتیب با y_{Ni} , y_{Ai} , y_{Ci} , y_{Ri} , نشان داده شود، می‌توان اختلاف دو به دو آنها را به صورت زیر نشان داد:

$$y_{Ci} - y_{Ri} = w_i(d\ln q_i - d\ln Q) - w_i d\ln q_i = -w_i d\ln Q \qquad (۱-۷۲)$$

$$y_{Ai} - y_{Ci} = dw_i + w_i(d\ln q_i - d\ln Q) = w_i(d\ln p_i - d\ln P) \qquad (۲-۷۲)$$

$$y_{Ni} - y_{Ai} = dw_i + w_i \ln Q - dw_i = w_i d\ln Q \qquad (۳-۷۲)$$

که در آن از (۶۱) و (۲۱) استفاده شده است. همهٔ تفاضلهای دوتایی دیگر را می‌توان از این سه عبارت بدست آورد. سیستم تقاضای سنتی متغیرهای طرف چپ؛ یعنی $d\ln Q$، تغییر در درآمد واقعی، $d\ln p_i \quad , i=1,...,n$، را به عنوان متغییرهای برونزا در نظر می‌گیرد.

پیشینه تجربی

در ارتباط با سیستم‌های تقاضا مطالعات متعددی صورت گرفته است. یکی از ابتدایی‌ترین مدل‌هایی که در زمینه سیستم‌های تقاضا وجود دارد، سیستم مخارج خطی است که اولین بار توسط استون و جری در سال ۱۹۵۴ پیشنهاد گردید. در ادامه این مدل،هاتاکر در سال ۱۹۶۰ سیستم تقاضای لگاریتمی غیرمسیتقیم[1] را ارائه نمود. تایل در سال ۱۹۶۵ سیستم تقاضای روتردام را مطرح کرد. به دنبال مقاله دایورت[2] شکلهای تبعی انعطاف پذیر سیستم‌های تقاضا مطرح شد. دیتون و مالبوئر در سال ۱۹۸۰ سیستم تقاضای تقریبا ایده آل را پیشنهاد کردند که «ملینا» با استفاده از این مدل تقاضای خوراک اسپانیا را طی دوره ۱۹۶۴-۱۹۸۹ برآورد نموده است. «دریل و کلر» از اداره مرکزی آمار هلند برای اولین بار یک مدل ترکیبی از سیستم تقاضای تقریباً ایده‌آل و سیستم تقاضای روتردام ارائه کردند که به

---

[1]. Indirect Aggregate System (IAS)
[2]. Diewert, (1971).

سیستم تقاضای cbs مشهور است. مدل ترکیبی دیگری توسط نوس در سال ۱۹۸۷ پیشنهاد گردید که به مدل NBR مشهور می‌باشد.

در اقتصاد ایران نیز این مدل‌ها به صورت موردی بررسی شده‌است که از آن جمله می‌توان به مطالعه خسروی نژاد (۱۳۶۹)، صمیمی‌فر (۱۳۷۲)، عدیوی (۱۳۷۲)، عبدلی (۱۳۷۵)، پناهی (۱۳۷۷) و محمدزاده (۱۳۸۲) و... اشاره کرد.

آمار و اطلاعات مورد استفاده برای برآورد مدل

به منظور بررسی تجربی سیستم تقاضای روتردام از داده‌های سالانه، مخارج مصرفی خانوارهای شهری استان آذربایجان غربی طی دوره ۱۳۸۲-۱۳۵۸ استفاده شده است. در این مطالعه با توجه به این که هدف اصلی، بررسی تجربی مدل‌ها و آزمون قیدهای همگنی و تقارن می‌باشد. لذا به جای هشت گروه کالا و خدمات، از پنج گروه استفاده شده است که عبارتند از:

- گروه خوراکی‌ها، آشامیدنی‌ها و دخانیات(KH)
- گروه پوشاک و کفش (PO)
- گروه مسکن و سوخت (MAS)
- گروه لوازم و اثاثیه(AS)
- گروه متفرقه(MO)

لازم به ذکر است که بیان شود گروه کالایی متفرقه از جمع گروههای کالایی حمل و نقل، بهداشت، تفریح و متفرقه بدست آمده است. به منظور بدست آوردن شاخص قیمتی این گروه، از شاخص استون نیز استفاده شده است.

بررسی تجربی سیستم تقاضای روتردام (مقید و غیر مقید)

در این قسمت از مقاله به بررسی سیستم‌های تقاضای ذکر شده در بالا پرداخته می‌شود. ابتدا سیستم‌های تقاضا را برآورد کرده، سپس‌خواص نظری تقاضای مصرف‌کننده نیز

مورد آزمون قرار می‌گیرد.

سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید

در این قسمت به برآورد سیستم تقاضای روتردام بـا اعمـال قیـد پرداختـه مـی‌شـود. منظور از اعمال قید این است که قیـود همگنـی($\sum_{i=1}^{5} S_{ij} = 0$) و تقـارن($S_{ij} = S_{ji}$) را بـه مدل اعمال می‌کنیم. با توجه به این که برای برآورد مدل، پنج گروه کالایی را در نظر گـرفتیم برای چهار گروه اول می‌توان مدل روتردام را به صورت زیر نوشت:

$$w_1 dlq_1 = b_1 dlQ + \sum_{j=1}^{5} s_{1j} dlp_j$$
$$w_2 dlq_2 = b_2 dlQ + \sum_{j=1}^{5} s_{2j} dlp_j$$
$$w_3 dlq_3 = b_3 dlQ + \sum_{j=1}^{5} s_{3j} dlp_j$$
$$w_4 dlq_4 = b_4 dlQ + \sum_{j=1}^{5} s_{4j} dlp_j$$

اعداد ۱ تا ۴ به ترتیب بیانگر گروه کالایی خوراک، پوشاک، مسکن و اثاثیه مـی‌باشـد. برای سادگی dl را با D نشان می‌دهیم. حـال اگـر ایـن چهـار گـروه را بـاهم جمـع بـزنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{4} w_i .D q_i = \sum_{i=1}^{4} b_i .DQ + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1} s_{ij} \ln p_j$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$DQ - w_5 Dq_5 = (1 - b_5) DQ + \sum_{j=1}^{5} s_{5j} Dp_j$$

این رابطه از این جا استخراج شده است که چون $\sum_{i=1}^{5} b_i = 1$ است، لذا داریم $b_5 = 1 - \sum_{i=1}^{4} b_i$ از آنجا که $DQ = \sum_{i=1}^{5} w_i Dq_i$ می‌باشد، لذا داریم $\sum_{i=1}^{4} Dq_i = DQ - w_5 Dq_5$. حال اگر معادله بالا را ساده تر کنیم می‌توان رابطه زیر را بدست آورد.

$$w_5 Dq_5 = b_5 Dq_5 + \sum_{j=1}^{5} s_{5j}$$

این معادله به این معنی است که جمع چهار معادله اول، همان معادله پنجم است و با برآورد چهار معادله اول می‌توان معادله پنجم را نیز استخراج کرد. برای برآورد مدل فوق از روش رگرسیون به ظاهر نامرتبط(SUR) استفاده می‌کنیم. نتایج برآورد در جدول(۱) آورده شده است.

جدول ۱. برآورد پارامترهای سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید برای پنج گروه کالایی مخارج مصرفی، مصرف کنندگان شهری استان آذربایجان غربی طی دوره ۱۳۸۲-۱۳۵۸

گروههای کالایی	عرض از مبداء	ضرایب شاخص‌های قیمتی					ضریب شاخص مقداری دیویزیا	ضریب تعیین
		s_{i1}	s_{i2}	s_{i3}	s_{i4}	s_{i5}	b_i	R^2
kh (se)	**-0/01 (0/007)**	**-0/14 (0/032)**	**−0/04 (0/028)**	**0/14 (0/047)**	**0/12 (0/04)**	**0/07 (0/03)**	**0/50 (0/02)**	**0/96**
po (se)	**-0/001 (0.002)**	**-0/058 (0/008)**	**-0/02 (0/008)**	**0/021 (0/013)**	**0/051 (0/011)**	**0/013 (0/011)**	**0/12 (0/007)**	**0/96**
mas (se)	**0/004 (0/0046)**	**0/083 (0/0255)**	**0/041 (0/019)**	**-0/19 (0/033)**	**-0/075 (0/028)**	**0/041 (0/032)**	**0/18 (0/009)**	**0/97**
as (se)	**0/0001 (0/002)**	**0/031 (0/011)**	**0/024 (0/011)**	**-0/003 (0/017)**	**-0/108 (0/016)**	**0/041 (0/015)**	**0/04 (0/011)**	**0/98**

برای برآورد پارامترهای مربوط به تقاضای گروه کالایی متفرقه، از ضرایب برآورد شـده برای چهار گروه کالایی و در نظر گرفتن قید همگنی و تقارن استفاده می‌شود. ضرایب مربـوط به شاخصهای قیمتی از طریق روابط زیر استخراج می‌گردد:

$$s_{11} + s_{12} + s_{13} + s_{14} = -s_{15} = -s_{51}$$
$$s_{21} + s_{22} + s_{23} + s_{24} = -s_{25} = -s_{52}$$
$$s_{31} + s_{32} + s_{33} + s_{34} = -s_{35} = -s_{53}$$
$$s_{41} + s_{42} + s_{43} + s_{44} = -s_{45} = -s_{54}$$

در حالت کلی می‌توان روابط فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} s_{ij} = \sum_{j=1}^{5} s_{5j}$$

براساس روابط مذکور، ضرایب استخراجی برای کالاهای متفرقه نیز به‌صورت زیر است:

گروه کالایی	ضرایب شاخصهای قیمتی					ضریب شاخص مقداری دیویزیا
	s_{i1}	s_{i2}	s_{i3}	s_{i4}	s_{i5}	b_i
mo	**0/084**	**-0/005**	**0/032**	**0/012**	**-0/165**	**0/16**

بـا توجـه بـه پارامترهـای اسـتخراج شـده، مـی‌تـوان بـا توجـه بـه روابـط($\eta_i = \frac{b_i}{w_i}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{s_{ij}}{w_i}$)، کشـش قیمتـی خـودی(ε_{ij} , $i = j$) و متقاطع(ε_{ij} , $i \neq j$) و کشش درآمدی(η_i) را محاسبه نمود. نتیجه محاسـبات در جـدول (۲) آمده است.

جدول ۲. کششهای قیمتی(ε_{ij}) و درآمدی(η_i) پنج گروه مختلف کالایی استخراج شده از سیستم تقاضای روتردام مقید

	ε_{i1}	ε_{i2}	ε_{i3}	ε_{i4}	ε_{i5}	η_i
گروه کالایی خوراک	-0/39	-0/11	0/39	0/34	0/2	1/4
گروه کالایی پوشاک و کفش	-0/52	-0/18	0/19	0/46	0/12	1/07
گروه کالایی مسکن	0/29	0/14	-0/67	-0/27	0/14	0/64
گروه کالایی لوازم و اثاثیه	0/46	0/35	-0/04	-1/59	0/6	0/59
گروه کالایی متفرقه	0/47	-0/03	0/18	0/07	-0/92	0/89

با توجه به جدول (۲) می‌توان بیان کرد که همهٔ کالاها قانون تقاضا را تأمین کرده‌اند و دارای کشش قیمتی خودی منفی هستند. در این میان کشش قیمتی گروه کالایی لوازم و اثاثیه برابر(۱/۵۹-) است که در بین گروههای کالایی، بیشترین واکنش را نسبت به تغییرات قیمت می‌دهد. کشش درآمدی گروه خوراک برابر ۱/۴ می‌باشد. این کشش بیانگر آن است که با افزایش مخارج خانوارهای شهری در استان آذربایجان غربی به میزان یک درصد، مخارج گروه کالایی خوراک شهری به میزان ۱/۴ درصد افزایش می‌یابد که این موضوع حاکی از آن است که با افزایش درآمد یا مخارج خانوارهای شهری، سهم بودجه‌ای گروه خوراک افزایش می‌یابد.

برای این که معادلات تقاضای برآورد شده، از لحاظ تئوریکی نیز مورد تایید قرار گیرد آزمون همگنی و تقارن را برای سیستم معادلات تقاضای روتردام انجام می‌دهیم. برای آزمون قید همگنی و تقارن، از آزمون والد استفاده می‌شود که نتایج آن در جدولهای (۳ و ۴) آورده شده است.

جدول ۳. آزمون فرضیه همگن بودن معادلات تقاضای سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید

	آماره آزمون	مقـــــدار بحرانی	سطح احتمال
گروه کالایی خوراک	*Chi - square*	9/95	0/0016
گروه کالایی پوشاک و کفش	*Chi - square*	0/31	0/58
گروه کالایی مسکن	*Chi - square*	14/1	0/0002
گروه کالایی لوازم و اثاثیه	*Chi - square*	0/89	0/35

بر اساس جدول (۳) می‌توان بیان نمود کـه خصوصـیت همگنــی در مـورد گروههـای کالایی خوراک و مسکن در سطح معنی داری ۵ درصد رد می‌شود و در مورد گروههای کالایی پوشاک و اثاثیه، خصوصیت همگنی را در سطح معنـی داری ۵ درصـد نمـی تـوان بـر اسـاس مشاهدات موجود رد کرد.

جدول ۴. آزمون فرضیه تقارن در سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید

	آماره آزمون	مقدار بحرانی	سطح احتمال
سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید	*Chi - square*	16/35	0/012
انحراف معیار		مقدار بحرانی	محدودیت‌های نرمال شده
0/029		0/0084	C(12) - C(21)
0/053		0/056	C(13) - C(31)
0/039		0/094	C(14) - C(41)
0/023		-0/02	C(23) - C(32)
0/014		0/027	C(24) - C(42)
0/034		-0/072	C(34) - C(43)

خصوصیت تقارن در مورد سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید برقرار نمی‌باشد؛ یعنی این فرض که ($s_{ij} = s_{ji}$) در مورد سیستم تقاضای روتـردام براسـاس آمـار اطلاعـات اسـتان آذربایجان غربی در سطح معنی داری ۵ درصد مورد تأیید قرار نمی‌گیرد.

بررسی تجربی سیستم تقاضای روتردام غیر مقید

منظور از مدل غیر مقید این است که قیدهای تقارن در سیستم تقاضای روتـردام وارد نشود. در این صورت فقط قید همگنی ($\sum_{i=1}^{5} s_{ij} = 0$) در مدل لحاظ می‌شود. برای لحاظ این قید در برآورد مدل؛ مثلاً در معادله اول به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$s_{11} + s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{15} = 0 \;\Rightarrow\; s_{15} = -s_{11} - s_{12} - s_{13} - s_{14}$$

رابطه زیر که بیانگر سیستم تقاضای روتردام برای گروه کالایی خوراک می‌باشـد، را در نظر می‌گیریم :

$$w_1 Dq_1 = b_1 dQ + s_{11} Dp_1 + s_{12} Dp_2 + s_{13} Dp_3 + s_{14} Dp_4 + s_{15} Dp_{15}$$

در معادله بالا اندیس (۱) بیانگر گروه کالایی خوراک و بقیه حروف بـه ترتیـب بیـانگر پوشاک، مسکن، اثاثیه و کالاهای متفرقه هستند؛ چنانچه قید بالا را وارد کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} w_1 Dq_1 &= b_1 dQ + s_{11} Dp_1 + s_{12} Dp_2 + s_{13} Dp_3 + s_{14} Dp_4 \\ &+ (-s_{11} - s_{12} - s_{13} - s_{14}) Dp_{15} \end{aligned}$$

حال اگر معادله بالا را ساده تر کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} w_1 Dq_1 &= b_1 dQ + s_{11}\{Dp_1 - Dp_5\} + s_{12}\{Dp_2 - Dp_5\} \\ &+ s_{13}\{Dp_3 - Dp_5\} + s_{14}\{Dp_4 - Dp_5\} \end{aligned}$$

در نهایت سیستم تقاضای روتردام غیر مقید برای پنج گروه کالایی به صورت زیر می‌باشد:

$$w_i Dq_i = b_i DQ + \sum s_{ij}\{Dp_j - Dp_5\} + \varepsilon_{it}$$

برای برآورد مدل فوق از روش رگرسیون به ظاهر نامرتبط(SUR) استفاده می‌شود. نتایج برآورد در جدول(۵) آورده شده است.

جدول ۵. برآورد پارامترهای سیستم تقاضای روتردام غیر مقید برای پنج گروه کالایی مخارج مصرفی، مصرف کنندگان شهری استان آذربایجان غربی طی دوره ۱۳۵۸- ۱۳۸۲

گروههای کالایی	*intercept*	ضرایب شاخص‌های قیمتی				ضریب شاخص مقداری دیویزیا	ضریب تعیین
		s_{i1}	s_{i2}	s_{i3}	s_{i4}	b_i	R^2
Kh	0/001	-0/16	-0/04	0/03	0/09	0/45	0/93
Po	-0/001	-0/05	-0/018	0/013	0/043	0/12	0/94
Mas	-0/004	0/097	0/033	-0/12	-0/04	0/22	0/86
As	-0/001	0/31	0.023	0/008	-0/04	0/047	0/98
*Mo**	--	-0/197	0/002	0/069	-0/053	0/163	---

*از طریق محاسبات استخراج شده است

با توجه به پارامترهای استخراج شده، می‌توان از طریق روابط($\varepsilon_{ij} = \frac{s_{ij}}{w_i}$, $\eta_i = \frac{b_i}{w_i}$)، کشش قیمتی خودی(ε_{ij} , $i = j$) و متقاطع(ε_{ij} , $i \neq j$) و کشش درآمدی(η_i) را محاسبه نمود. نتیجه محاسبات در جدول (۶) آمده است.

جدول ۶. کششهای قیمتی(ε_{ij}) و درآمدی(η_i) پنج گروه مختلف کالایی استخراج شده از سیستم تقاضای روتردام غیر مقید

	ε_{i1}	ε_{i2}	ε_{i3}	ε_{i4}	η_i
گروه کالایی خوراک	-0/45	-0/11	0/08	0/25	1/26
گروه کالایی پوشاک و کفش	-0/45	-0/16	0/12	0/38	1/07
گروه کالایی مسکن	0/34	0/12	-0/42	-0/14	0/78
گروه کالایی لوازم و اثاثیه	4/6	0/34	0/12	-0/59	0/69
گروه کالایی متفرقه	-1/09	0/01	0/38	-0/29	0/91

با توجه به جدول (۶) می‌توان بیان کرد که همـه گروههـای کـالایی، قـانون تقاضـا را تأمین کرده‌اند و دارای کشش قیمتی خودی منفی هستند. در این میان کشش قیمتـی گـروه کالایی لوازم و اثاثیه برابر(۰/۵۹-)می باشد که در بین گروههای کالایی، بیشـترین واکـنش را نسبت به تغییرات قیمت می‌دهد. کشش درآمدی گروه خوراک برابر ۱/۲ اسـت؛ ایـن کشـش بیانگر آن است که با افزایش مخارج خانوارهای شهری در استان آذربایجان غربی به میزان یک درصد، مخارج گروه کالایی خوراک شهری به میزان ۱/۲ درصد افزایش می‌یابد که این موضوع حاکی از آن است که با افزایش درآمد یا مخـارج خانوارهـای شـهری، سـهم بودجـه ای گـروه خوراک نیز افزایش می‌یابد.

برای این که معادلات تقاضای برآورد شده به لحاظ نظری نیز مورد تأیید قـرار گیـرد، آزمون همگنی و تقارن را برای سیستم معادلات تقاضای روتردام انجام می‌دهیم. برای آزمـون قید همگنی و تقارن از آزمون والد استفاده می‌شود که نتایج آن در جـدولهای (۷ و ۸) آورده شده است.

جدول ۷. آزمون فرضیه همگن بودن معادلات تقاضای سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید

	آماره آزمون	مقدار بحرانی	سطح لحتمال
گروه کالایی خوراک	*Chi - square*	2/1	0/145
گروه کالایی پوشاک و کفش	*Chi - square*	2/1	0/145
گروه کالایی مسکن	*Chi - square*	1/069	0/3
گروه کالایی لوازم و اثاثیه	*Chi - square*	6/99	0/008

بر اساس جدول (۷) می‌توان بیان کـرد کـه خصوصـیت همگنـی در مـورد گروههـای کالایی خوراک، مسکن و پوشاک را در سطح معنی داری ۵ درصد با توجه بـه آمـاره کـای-دو نمی توان رد کرد و فرض همگنی نیز مورد تأیید قرار می‌گیرد. خصوصـیت همگنـی در مـورد گروه کالایی لوازم و اثاثیه در سطح معنی داری ۵ درصد رد می‌شود.

جدول ۸. آزمون فرضیه تقارن در سیستم تقاضای روتردام با اعمال قید

		آماره آزمون	مقدار بحرانی	سطح احتمال
سیستم تقاضای روتردام غیر مقید		***Chi - square***	٥4.7	٥0.4
انحراف معیار			مقدار بحرانی	محدودیت‌های نرمال شده
0/0374			0/0135	C(12) - C(21)
0/0535			-0/0616	C(13) - C(31)
0/054			0/063	C(14) - C(41)
0/0319			-0/0201	C(23) - C(32)
0/0497			-0/0573	C(34) - C(43)

خصوصیت تقارن در مورد سیستم تقاضای روتردام غیر مقید برقرار می‌باشد؛ یعنی این فرض که ($s_{ij} = s_{ji}$) در مورد سیستم تقاضای روتردام غیرمقید براساس آمار اطلاعات استان آذربایجان غربی در سطح معنی داری ۵ درصد مورد تأیید قرار می‌گیرد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی شد تا روشهای استخراج سیستم‌های تقاضا برای رفتار مصرف‌کننده بیان شود. با توجه به هدف مقاله، سیستم تقاضای روتردام به صورت مقید و غیرمقید، با استفاده از داده‌های مخارج مصرفی سالانه خانوارهای شهری استان آذربایجان غربی طی دوره ۱۳۸۲-۱۳۵۸، برآورد گردید. نتایج حاصل از برآورد مدل و آزمون فرضیه‌های مربوط به سازگاری با ویژگی‌های نظری رفتار مصرف کنندگان، نشان داد که در سیستم تقاضای روتردام قید همگنی در هر دو حالت مقید و غیر مقید برقرار است و قید تقارن در حالت مقید صادق نیست؛ در حالیکه در حالت غیر مقید مورد تأیید قرار می‌گیرد.

پی‌نوشتها:

۱. پناهی، علیرضا. «تحلیل رفتار مصرفی در مناطق شهری، کاربرد سیستم تقاضای ایده‌آل». *مجله برنامه بودجه*، (مرداد و شهریور ۱۳۷۷).

۲. خسروی نژاد، علی اکبر. «برآورد سیستم مخارج خطی تقاضا برای خانوارهای شهری ایران». *پایان‌نامه کارشناسی ارشد اقتصاد*، دانشکده اقتصاد شهید بهشتی، ۱۳۷۶.

۳. سوری، داوود و آهنگرانی، پویان. «سیستم معادلات تقاضا با توجه به نقش مشخصه های اجتماعی خانوار». *پژوهشنامه بازرگانی*، (بهار ۱۳۷۷).

۴. قنبری عدیوی، علی. «مدل عرضه تقاضای گوشت در ایران». پایان‌نامه دوره دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، (۱۳۷۵).

۵. محمدزاده، پرویز. «مقایسه مدل های تخصیصی مصرف‌کننده $AIDS, CBS$ در اقتصاد ایران». *مجله تحقیقات اقتصادی*، دانشگاه تهران، شماره ۶۸، (۱۳۸۴).

6. Barten, A. P. "Consumer Allocation Models: Choice of Functional Form"., ***Empirical Economics***, (1993).

7. Christensen, L. R, Gorgenson, D.W, Lau L J. "Transcendental logarithmic utility function"., ***American Economic Review***, (1975).
Deaton, A.S. and Muellbur, J. ***Economics and Consumer Behavior***. Cambridge University Press., 1980.

8. Deaton, A. S. and Muellbur, J., "An Almost Ideal Demand System"., ***American Economic Review***, 70(3), (1980).

9. Diewert, W. E. "An Application of Shepard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function"., ***Journal of Political Economics***, (May 1971).

10. Dreil, H., Van. Venuta, Zeelenberg, K. "The Demand for Food in the United State and the Netherlands: Asystem Approach with the CBS Model"., ***Journal of Applied Econometrics***, Vol. 12, (1997).

11. Frisch, R. "A Complete Scheme for Computing all Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sector"., ***Econometrica***, No.27, (1959).

12. Hans Van Driel, Venuta & Kees Zeelenberg. "The Demand For Food In The United States And The Netherlands: A Systems Approach With The CBS Model"., ***Journal of Applied Econometrics***, Vol. 12, (1997).

13. Houtaker, W. "Additive Preference"., ***Econometrica***, Vol. 28, (1960).

14. Keller, W J. Van, Driel, J. "Differential Consumer Demand System"., ***European Economic Review***, No.27, (1985).

15. Neves, P. ***Analysis of Consumer Demand in Portugal, 1958-1981***. University Catholique de Louvien., 1987.

16. Philippe, J. Deschamps, Exact Small Sample Inference in Stationary Fully Regular, Dynamic Demand Model"., ***Journal of Econometrics***, No.97, (2000).

17. Philippe, J. Deschamps. "Full Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Demand Model"., ***Journal of Econometrics***, No.82, (1997).

18. Stone, R. "Linear Expenditure System and Demand Analysis: an Application to the Pattern of British Demand"., ***The Economic Journal***, (1954).

19. Thiel, H. "The Information Approach to Demand Analysis"., ***Econometrica***, Vol. 37, (1965).