محاسبه نقطه سفارش مجدد در حالت فازی

جعفر رضایی *

دکتر سید محمد تقی فاطمی قمی **

چکیده

یکی از مسایل اصلی کنترل موجودیها، تعیین نقطه سفارش مجدد است. پارامترهای مشخص کننده این نقطه، معمولا به یکی از دو صورت قطعی و احتمالی است. در این مقاله به دلیل اینکه دنیای واقعی آکنده از عدم قطعیت‌ها و ابهامات است و در اکثر مواقع نمی‌توان پارامترها را به‌صورت قطعی و یا احتمالی مشخص نمود، به صورت فازی در نظر گرفته می‌شوند. لذا مقدار نقطه سفارش مجدد با کاربرد مفهوم « α ـ برش »، اصل گسترش، حساب فازی و اعداد فازی ذوزنقه ای بدست می‌آید که مساله را بیشتر به واقعیت خود نزدیک می‌سازد. در پایان، نتایج پژوهش آورده شده است.

کلیدواژه‌ها: نقطه سفارش مجدد ، ذخیره ایمنی ، مفهوم « α ـ برش»، اصل گسترش، حساب فازی

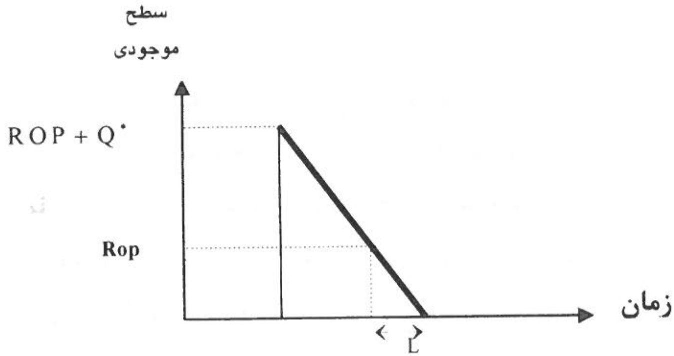
---

* - دانشکده مدیریت دانشگاه ولیعصر رفسنجان

** - دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- مقدمه

در مدلهای کنترل موجودی ، پس از آنکه مقدار سفارش اقتصادی مشخص گردید، باید به تعیین زمان سفارش پرداخت. مدلهای موجودی ساده مثل مدل مقدار سفارش اقتصادی، فرض را بر دریافت آنی سفارش می‌گذارند بدین معنی که فرض می‌کنند اولا شرکت زمانی برای یک قلم موجودی سفارش می‌دهد که سطح آن قلم خاص به صفر برسد و ثانیا مقدار سفارش داده شده فورا و بدون تاخیردریافت می‌گردد[۱و۵]. به‌هرحال زمان بین سفارش و دریافت آن که زمان تاخیر[1] نامیده می‌شود می‌تواند از چندین ساعت تا چندین ماه در تغییر باشد. تصمیم در مورد زمان سفارش معمولا تحت عنوان نقطه سفارش مجدد[2] (ROP) مطرح می‌شود که منظور از آن سطحی از موجودی است که در آن سطح، سفارش باید صورت گیرد (شکل۱).



شکل ۱- منحنی نقطه سفارش مجدد

نقطه سفارش مجدد (ROP) به صورت قطعی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$ROP = (\text{تقاضای روزانه}) \times (\text{زمان تاخیر به روز}) = d \times L \quad (۱)$$

تقاضای روزانه، d، با تقسیم تقاضای سالیانه،D، بر تعداد روزهای کاری در سال(T) به‌دست می‌آید:

---

1 -Lead time

2 -Reorder point

$$d= \frac{D}{T}$$

بر اساس رابطه (۱) فرض می‌شود که تقاضا در طول زمان تاخیر و خود زمان تاخیر ثابت هستند. هنگامیکه چنین نباشد، یعنی تقاضا در طول زمان تاخیر ویا خود زمان تاخیرو یا هر دو ثابت نباشند، موجودی اضافی، که اغلب ذخیره ایمنی[1] نامیده می‌شود، باید اضافه گردد. بنابراین نقطه سفارش مجدد به صورت زیر خواهد بود:

$$ROP = d \times L + Ss \qquad (۲)$$

مدلهای احتمالی، که از قابلیت انعطاف بیشتری برخوردار هستند برای تقاضا در طول زمان تاخیر، یا خود زمان تاخیر توزیعهای احتمالی در نظر می‌گیرند. در حالت اول زمان تاخیر را ثابت در نظر گرفته وبا توجه به توزیع تقاضا در طول زمان تاخیر بر اساس ضریب اطمینان خاصی به تعیین نقطه سفارش می‌پردازند[۸-۵].

در حالت دوم تقاضای روزانه را ثابت در نظر گرفته و با توجه به توزیع زمان تاخیر و باز بر اساس ضریب اطمینان خاصی به تعیین نقطه سفارش می‌پردازند [۱و۵و۹].

برای مثال در صورتیکه تقاضا به صورت احتمالی با توزیع نرمال و زمان تاخیر به صورت ثابت در نظر گرفته شود مقدار ROP به صورت زیر قابل محاسبه است[۵]:

$$ROP = \bar{d}L + z_{\alpha} \times \sigma_{d} \sqrt{L} \qquad (۳)$$

در زمینه کنترل موجودی، تا به حال مدلهای فازی متعددی ارائه شده است. در اغلب این مدلها تنها به تعیین مقدار سفارش اقتصادی و هزینه کل موجودی پرداخته شده است که برای نمونه می توان به کارهای(یائو وهمکاران، یائو و لی، پارک، چن و همکاران، واجوسویچ و همکاران، روی و مایتی، چنگ و همکاران، ژن و تساجیمورا) اشاره نمود [۱۹-۱۱]. در این مدلها به تعیین نقطه سفارش مجدد در حالت فازی پرداخته نشده است. با توجه به عوامل بعضا ناشناخته و غیر قابل پیش‌بینی و کنترل، در دنیای واقعی، اغلب نمی‌توان به تعیین تقاضای روزانه و زمان تاخیر به‌صورت

1- Safety stock

قطعی و یا حتی گاهی به‌صورت احتمالی پرداخت. بنابراین می‌توان برای در نظر گرفتن ابهامات و عدم قطعیت‌ها در تعیین نقطه سفارش به‌جای پارامترهای قطعی یا احتمالی از پارامترهای فازی استفاده نمود. براین اساس با توجه به اینکه معمولا می‌توان تعداد روزهای کاری را به‌صورت یک عدد قطعی مشخص نمود و با فرض اینکه مقدار ذخیره ایمنی نیز یک عدد قطعی باشد، با در نظر گرفتن تقاضا(مصرف) سالیانه وزمان تاخیر به‌صورت فازی به تعیین نقطه سفارش مجدد (ROP) پرداخته می‌شود.

۲- فازی‌سازی نقطه سفارش مجدد

در صورتیکه پارامترهای تقاضا(مصرف) سالیانه و زمان تاخیر به‌صورت فازی و تعداد روزهای کاری در سال و ذخیره ایمنی به‌صورت قطعی در نظر گرفته شود رابطه نقطه سفارش مجدد به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\tilde{ROP} = \frac{\tilde{D}}{T} \times \tilde{L} + Ss \tag{٤}$$

۱-۲- به‌دست آوردن تابع عضویت ROP

معمولا در عمل به ندرت می توان مقداری قطعی برای تقاضا و یا طول زمان تاخیر به دست آورد. برای مثال در مورد تقاضای کالای خاصی چنین عنوان می شود که "مقدار تقاضای سالیانه حدودا ۱۰۰۰۰ واحد است، کمتر از ۸۶۰۰ واحد نیست، بیشتر از ۱۱۷۰۰ واحد نیز نخواهد شد." هنگامیکه مقدار تقاضای سالیانه به صورت غیر قطعی بیان می شود بدیهی است که تقاضای روزانه نیز به صورت غیر قطعی خواهد بود. همچنین در مورد طول زمان تاخیر معمولا برای مثال چنین گفته می شود که " طول زمان تاخیر حدودا ۱۰ روز است، کمتر از ۵ روز نیست و بیشتر از ۱٦ روز نخواهد شد". بیان این پارامترها به صورت فوق ما را به استفاده از اعداد فازی‌برای تبیین موقعیت این پارامترهاهدایت خواهد نمود. از جمله اعداد فازی مورد

استفاده، در مدل سازی های فازی اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای است که به دلیل سهولت در محاسباتً به طور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته اند.

تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} \frac{1}{m-l}x - \frac{l}{m-l} & x \in [l,m] \\ \frac{1}{m-u}x - \frac{u}{m-u} & x \in [m,u] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن $l \le m \le u$ و l و u حدود پایین و بالای مجموعه پشتیبان M هستند و m مقدار میانی است.

اغلب عملگرهای ریاضی اعداد فازی مثلثی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

(٦) برای جمع:

$$n_1 + n_2 = (n_{1l} + n_{2l}, n_{1m} + n_{2m}, n_{1u} + n_{2u})$$

(۷) برای ضرب:

$$n_1 \times n_2 = (n_{1l} \times n_{2l}, n_{1m} \times n_{2m}, n_{1u} \times n_{2u})$$

(۸) برای تقسیم:

$$\frac{1}{n_1} = (\frac{1}{n_{1u}}, \frac{1}{n_{1m}}, \frac{1}{n_{1l}})$$

که در آنها $n_1 = (n_{1l}, n_{1m}, n_{1u})$ و $n_2 = (n_{2l}, n_{2m}, n_{2u})$ دو عدد فازی مثلثی هستند[۱۰]. بر این اساس در صورتیکه پارامترهای تقاضا(مصرف) سالیانه و زمان تاخیر را به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای مثبت در نظر بگیریم:

$$\mu_D(D) = \begin{cases} 0 & D \le D_1 \\ \frac{D-D_1}{D_2 - D_1} & D_1 \le D \le D_2 \\ 1 & D_2 \le D \le D_3 \\ \frac{D_4 - D}{D_4 - D_3} & D_3 \le D \le D_4 \\ 0 & D \ge D_4 \end{cases}$$

(۹) تابع عضویت مصرف(تقاضا)

$$\mu_{\tilde{L}}(L)=\begin{cases} 0 & L \le L_1 \\ \dfrac{L\text{-}L_1}{L_2-L_1} & L_1 \le L \le L_2 \\ 1 & L_2 \le L \le L_3 \\ \dfrac{L_4-L}{L_4-L_3} & L_3 \le L \le L_4 \\ 0 & L \ge L_4 \end{cases}$$

(۱۰) تابع عضویت زمان تاخیر

و در صورتیکه:

$$\tilde{F}=\tilde{D}\times\tilde{L} \qquad (۱۱)$$

آنگاه با استفاده از برش تراز α[۲] برای $\alpha\in[0,1]$ داریم:

$$F_\alpha^L=[D_1+\alpha(D_2-D_1)][L_1+\alpha(L_2-L_1)] \qquad (۱۲)$$

$$F_\alpha^U=[D_4+\alpha(D_4-D_3)][L_4+\alpha(L_4-L_3)] \qquad (۱۳)$$

و در نتیجه تابع عضویت F به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} 0 & F\le D_1L_1 \\ \dfrac{-D_1(\Delta_1L)-L_1(\Delta_1D)+\sqrt{[(D_1(\Delta_1L)+L_1(\Delta_1D)]^2-4(\Delta_1D)(\Delta_1L)(D_1L_1-F)}}{2(\Delta_1D)(\Delta_1L)} & D_1L_1\le F\le D_2L_2 \\ 1 & D_2L_2\le F\le D_3L_3 \\ \dfrac{D_4(\Delta_2L)+L_4(\Delta_2D)-\sqrt{[(D_4(\Delta_2L)+L_4(\Delta_2D)]^2-4(\Delta_2D)(\Delta_2L)(D_4L_4-F)}}{2(\Delta_2D)(\Delta_2L)} & D_3L_3\le F\le D_4L_4 \\ 0 & F\ge D_4L_4 \end{cases}$$

(۱٤)

که در آن:

$$\Delta_1 D = D_2 - D_1 \qquad , \Delta_2 D = D_4 - D_3$$
$$\Delta_1 L = L_2 - L_1 \qquad , \Delta_2 L = L_4 - L_3$$

همچنین با توجه به روابط (۳)و(۱۱) داریم:

$$ROP = \frac{\tilde{F}}{T} + Ss \qquad (۱۵)$$

بنابراین تابع عضویت ROP به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{ROP}(ROP) = \begin{cases} 0 & ROP \le \frac{D_1}{T} L_1 + Ss \\ \frac{-D_1(\Delta_1 L) - L_1(\Delta_1 D) + \sqrt{\left[(D_1(\Delta_1 L) + L_1(\Delta_1 D)\right]^2 - 4(\Delta_1 D)(\Delta_1 L)(D_1 L_1 - (ROP - Ss)T)}}{2(\Delta_1 D)(\Delta_1 L)} & \frac{D_1}{T} L_1 + Ss \le ROP \le \frac{D_2}{T} L_2 + Ss \\ 1 & \frac{D_2}{T} L_2 + Ss \le ROP \le \frac{D_3}{T} L_3 + Ss \\ \frac{D_4(\Delta_2 L) + L_4(\Delta_2 D) - \sqrt{\left[(D_4(\Delta_2 L) + L_4(\Delta_2 D)\right]^2 - 4(\Delta_2 D)(\Delta_2 L)(D_4 L_4 - (ROP - Ss)T)}}{2(\Delta_2 D)(\Delta_2 L)} & \frac{D_3}{T} L_3 + Ss \le ROP \le \frac{D_4}{T} L_4 + Ss \\ 0 & ROP \ge \frac{D_4}{T} L_4 + Ss \end{cases}$$

(۱۶)

۳- دیفازی سازی نقطه سفارش مجدد

رابطه (۱۶) تابع عضویت ROP را نشان می دهد. تصمیم‌گیرنده با استفاده از این تابع قادر به تصمیم گیری نیست و باید مقدار خاصی را به‌عنوان ROP در نظر بگیرد. برای این کار می‌توان با ا ستفاده از یکی از روش‌های دیفازی‌سازی[۱] [۳] تابع عضویت ROP را دیفازی نمود و آنگاه بر اساس مقدار قطعی به دست آمده به تصمیم‌گیری پرداخت.در این مقاله از روش میانگین فازی استفاده می شود[٤].

1- Defuzzification

$$defuzz(Rop) = \frac{\int_R Rop\mu_{ROP}\, d\, Rop}{\int_R \mu_{ROP}(Rop) d\, Rop} \qquad (۱۷)$$

۴- خطای نسبی در حالت فازی

جهت محاسبه خطای نسبی نقطه سفارش مجدد در حالت فازی[1] باید به مقایسه ROPبه دست آمده در حالت فازی با ROP به دست آمده در حالت قطعی بپردازیم. از آنجا که پارامتر مصرف و زمان تاخیر به صورت فازی عنوان شده است جهت به دست آوردن مقدار قطعی ROP ابتدا باید به دیفازی سازی پارامترهای فازی (مصرف و زمان تاخیر) پرداخت. که برای این کار می توان از روش میانگین فازی استفاده نمود. سپس بر اساس مقادیر دیفازی شده مذکور(مصرف و زمان تاخیر)، ذخیره ایمنی، تعداد روزهای کاری و با استفاده از رابطه (۲) مقدار قطعی ROP را به دست می‌آوریم و آن را با ROP^* نشان می‌دهیم. مقدار ROP به دست آمده در حالت فازی را که از رابطه (۱۷) به دست می آید را نیز با ROP^{**} نشان می‌دهیم. سپس با استفاده از رابطه (۱۸) به محاسبه خطای نسبی نقطه سفارش مجدد در حالت فازی می پردازیم.

$$\mathrm{Re}l\, ROP = \frac{ROP^{**} - ROP^*}{ROP^*} \qquad (۱۸)$$

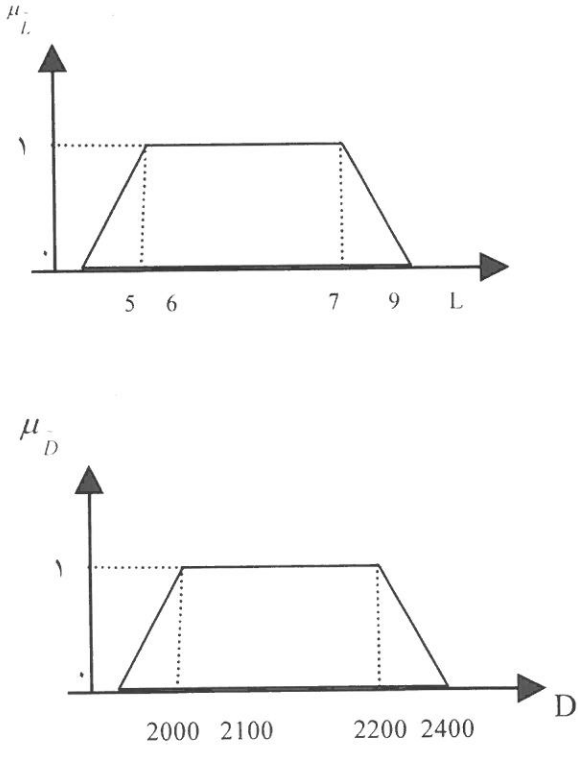
بدیهی است که هر چه نقطه سفارش مجدد در حالت قطعی(ROP^*) به نقطه سفارش مجدد در حالت فازی(ROP^{**}) نزدیکتر باشد، خطای نسبی نقطه سفارش مجدد در حالت فازی کوچکتر شده و به صفر میل می نماید.

1-Relative Error of Fuzzy ROP

۵- مثال عددی

در صورتیکه پارامترهای مساله به‌صورت اعداد فازی و قطعی زیر در نظر گرفته شود:

D=[2000,2100,2200,2400]
L=[5,6,7,9]
T=300
Ss=20



شکل ۲- اعداد فازی ذوزنقه‌ای مصرف(D)وزمان تاخیر(L)

آنگاه بر اساس رابطه (۱٦) تابع عضویت ROP بصورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_{ROP}(ROP)=\begin{cases}0 & ROP\le 53.33\\ \dfrac{-2500+\sqrt{120000ROP-150000}}{200} & 53.33\le ROP\le 62\\ 1 & 62\le ROP\le 71.33\\ \dfrac{6600-\sqrt{480000ROP-600000}}{800} & 71.33\le ROP\le 92\\ 0 & ROP\ge 92\end{cases}$$

سپس مقدار دیفازی‌شده $\tilde{ROP}$ با استفاده از رابطه (۱۷) به‌دست می‌آید:

$$defuzz(\tilde{Rop})=\frac{\int_{53.33}^{92} Rop\mu_{\tilde{ROP}}\, d\,Rop}{\int_{53.33}^{92}\mu_{\tilde{ROP}}(Rop)d\,Rop}$$

$$=70.14$$

که تخمینی برای ROP در حالت فازی است و تصمیم‌گیرنده می‌تواند از آن بعنوان نقطه سفارش مجدد استفاده نماید. بدین معنی که هرگاه میزان موجودی تقریبا به ۷۰ واحد تنزل پیدا نمود سفارشی به حجم Q صادر شود.

۵-۱- خطای نسبی در حالت فازی

در این قسمت جهت محاسبه خطای نسبی در حالت فازی ابتدا بـه دیفـازی سـازی مصرف و زمان تاخیر می پردازیم، سپس بر اساس این مقادیر دیفازی شـده، ذخیـره ایمنی و تعداد روزهای کاری و با استفاده از رابطه (۲) مقدار قطعی ROP را به دسـت می آوریم، و آن را با ROP^* نشان می دهیم.

$$defuzz(D)=2175$$

$$defuzz(L)=6.75$$

T=300

Ss=20

$$ROP^*=\frac{2175}{300}\times 6.75+20$$

$$=68.9375$$

همچنین داریم:

$$ROP^{**} = defuzz(ROP) = 70.14$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱۸) می توان خطای نسبی نقطه سفارش مجدد در حالت فازی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathrm{Re}l\,ROP = \frac{70.14 - 68.9375}{68.9375} = 0.01711$$

چنانکه ملاحظه می گردد خطای نسبی نقطه سفارش مجدد به دست آمده در حالت فازی بسیار ناچیز است. این امر قابلیت بالای مدلهای فازی را نشان می دهد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی فازی برای به‌دست آوردن نقطه سفارش مجدد ارائه گردید که در آن پارامترهای مصرف و زمان تاخیر، هر دو به صورت اعداد فازی ذوزنقه ای مورد استفاده قرار گرفتند. با توجه به اینکه این روش ابهامات و عدم قطعیت‌های دنیای واقعی را در نظر می‌گیرد می‌تواند مقداری را برای نقطه سفارش مجدد ارائه دهد که تصمیم گیرنده را در عمل با مشکلات کمتری مواجه سازد چرا که اغلب مشکلات اجرایی مدلهای کنترل موجودی در برآورد پارامترهای آن است. بنابراین با اطمینان بیشتری می‌توان نتایج روش ارائه شده را در عمل بکارگرفت. بدیهی است که هدف از ارائه چنین مدلی به دست آوردن مقدار نقطه سفارشی کمتر از مدل قطعی نیست و هدف، تنها، واقع گرایی بیشتر است. همچنین مقایسه نتایج قطعی و فازی حاکی از خطای بسیار ناچیز است که این امر قابلیت بالای مدلهای فازی را در مقایسه با مدلهای قطعی نشان می دهد.

منابع و مآخذ

1-Heizer, J., and Render,B., (1999), **Operations Management**, Prentice Hall.
2-Lai, Y.J.‚ and Hwang, Ch.L.,(1992), **Fuzzy Mathematical Programming**, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg.
3-Filve,D.P., and Yager, R.R., (1991), "A generalized defuzzification **method via bad distributions**, "Inteligent Systems",Vol.6, pp.687-697.
4-Vujosevic, M., Petrovic, D., and Petrovic, R., (1996), EOQ formula when inventory cost is fuzzy, **Production Economics**, Vol. 45, pp 499-504.
5-Stevenson, W.J., (2002), **Production Operations Management**, Richard. D.Irwin.Inc.
6-Federgruen, A., Groenevelt, H.,and Tijms, H.C., (1983), "Coordinated replenishments in a multi-item inventory system with compound Poisson Demands", **Management Science**, Vol.30,No3, pp.344-357.
7-Browne, S., Zipkin,P.,(1991), "Inventory models with continuous stochastic demands". **The Annals of Applied Probability**, Vol.1, No.3, pp. 419-435.
8-Beyer, D., Sethi, S.P.,and Taksar, M., (1998) ,"Inventory models with Markovian demands and cost functions of polynomial growth", **Optimization Theory and Applications**, Vol.98, No.2, pp.281-323.
9-Zipkin, P., (1986) ," Stochastic leadtimes in continuous time inventory models", **Naval Research Logistic Quarterly**, Vol.33, pp.763-774.
10-Zimmermann, H.J.,(1996),"**Fuzzy Set Theory and It's Applications**", third edition, Kluwer,Boston.
11-Park, K. S., (1987)., "Fuzzy-set theoretic interpretation of economic order quantity", **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, SMC, Vol.17, pp.1082–1084.
12-Roy, T. K., and Maiti, M., (1997), "A fuzzy EOQ model with demand dependent unit cost under limited storage capacity", European **Journal of Operational Research**, Vol.99, pp.425–432.

13-Chang, S.C., Yao, J.S.,and Lee, H. M., (1998), "**Economic reorder point for fuzzy backorder quantity**",European Journal of Operational Research,Vol.109, pp.183–202.
14-Lee, H.M., and Yao, J.Sh., (1999),"Economic order quantity in fuzzy sense for inventory without backorder model", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol.105, pp.13-31.
15-Yao, J.Sh., Change, S.Ch., and Su, J. Sh., (2000), "Fuzzy inventory without backorder for fuzzy order quantity and fuzzy total demand quantity", **Computers & Operations Research**, Vol.27, pp.935-962.
16-Yao, J. Sh., and Lee, H.M., (1996), "Fuzzy inventory with backorder for fuzzy order quantity", **Information Sciences**, Vol.93, pp.283-319.
17-Yao, J. Sh., and Lee, H.M., (1999), "Fuzzy inventory with or without backorder for order quantity with trapezoid fuzzy number", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol.105, pp.311-337.
18-Gen, M., Tsujimura. Y., and Zheng, D., (1997), "An application of fuzzy set theory to inventory control models", **Computers and industrial Engineering**,Vol.33,pp.553-556.
19-Chen, S. H., Wang, C. C., and Ramer, A., (1996), "Backorder fuzzy inventory model under function principle", **Information Sciences**, Vol 95, pp 71–79.