فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال نهم، شماره ۲۲، پاییز ۹۰
صفحات ۲۳ تا ٤۸

طراحی مدل ریاضی کسری برنامه‌ریزی تولید با رویکرد فازی
(مورد مطالعه: شرکت مبل خاورمیانه)

عادل آذر *
داود عندلیب اردکانی **
سید حیدر میرفخرالدینی ***

چکیده

امروزه یکی از مهمترین موضوعات مورد توجه مدیران صنایع، برنامه‌ریزی تولید است و در این حوزه، مدیران با اهداف متعددی روبرو می‌باشند که در بسیاری از مواقع با یکدیگر در تضادند. تکنیک‌های تحقیق در عملیات، با مدل‌سازی مسائل، در عین حال که محدودیت‌های موجود را در نظر می‌گیرند، به بهینه‌سازی اهداف سازمانی می‌پردازند. اهداف همه‌ی این تکنیک‌ها بالا بردن بهره‌وری در سازمان است. مدل ریاضی این تحقیق که جهت برنامه‌ریزی تولیدِ شرکت مبل خاورمیانه ساخته شده است، از نوع کسری چند هدفه است. یکی از مشکلاتی که در حل مسائل کسری چند هدفه وجود دارد پیچیدگی محاسباتی ناشی از تغییر متغیّر است که به طور مثال در روش‌های چارنز و کوپر و گیلمر و گموری وجود دارد. از این رو در این تحقیق جهت حل مدل ریاضی کسری چند هدفی شرکت مبل خاورمیانه از رویکرد فازی استفاده گردید. بدین‌طریق ضمن غلبه بر مشکلات ناشی از پیچیدگی محاسباتی تغییر متغیّر در روش‌های قبلی، مسؤلان ذی‌ربط نیز قادر خواهند شد تا به بهینه‌سازی سیستم تولیدی خود بپردازند. در این راستا ابتدا از روش فازی پال استفاده گردید که با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی فازی به خطی‌سازی مدل کسری چندهدفه می‌پردازد در ادامه با به‌کارگیری روش فازی دووتا مشخص گردید که مقادیر بهینه‌ی توابع هدف کسری حاصل از به‌کارگیری هر دو روش یکسان و با درجات عضویت $\mu_1 = .701$ و $\mu_2 = 1$ می‌باشد. لازم به ذکر است که شرکت‌های دیگر نیز با اندکی تغییر در مدل ریاضی پیشنهادی خواهند توانست تا به بهینه‌سازی برنامه‌ریزی تولید بپردازند.

واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی تولید، برنامه‌ریزی آرمانی فازی، بهره‌وری، برنامه‌ریزی کسری فازی

---

* استاد دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مدیریت و اقتصاد، تهران، ایران.

** دانشجوی دکتری دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مدیریت و اقتصاد، تهران، ایران. (مسئول مکاتبات) Email: andalib@modares.ac.ir

*** استادیار دانشگاه یزد، دانشکده مدیریت و اقتصاد Email: sh.mirfakhr@gmail.com

تاریخ دریافت: ۸۹/۲/۲۰ تاریخ پذیرش: ۸۹/۹/۲۱

مقدمه

مدیران در صنایع گوناگون جهت برنامه‌ریزی تولید، با اهداف متعددی از قبیل حداکثرکردن سود، حداقل‌سازی هزینه و ... روبرو هستند که گاه با یکدیگر در تضاد بوده و رسیدن به یک هدف، مانعی برای رسیدن به اهداف دیگر تلقی می‌گردد. از طرف دیگر، منابع محدود (سرمایه، مواد اولیه، نیروی انسانی، مکان، زمان و ...)، محدودیت‌هایی را برای سازمان‌ها بوجود آورده است. از این رو مدیران، ناگزیر به استفاده از روش‌هایی هستند که در ضمن رعایت محدودیت‌های موجود، بتوانند اهداف سازمانی را تا حد قابل قبولی برآورده سازند. تکنیک‌های تحقیق درعملیات، با مدل‌سازی مسائل، در عین حالی که محدودیت‌های موجود را در نظر می‌گیرند، به بهینه‌سازی اهداف سازمانی می‌پردازند. اهداف همه‌ی این تکنیک‌ها، بالابردن بهره‌وری در سازمان است.[۲,۴] برنامه‌ریزی کسری به عنوان یکی از فنون تحقیق در عملیات، از ابزار مهم برنامه‌ریزی در طول چهار دهه‌ی گذشته است که در زمینه‌های گوناگونی مانند: تخصیص منابع، حمل‌ونقل، برنامه‌ریزی تولید، مالی و ... به کار گرفته شده است.[۷,۸] برنامه‌ریزی کسری به طور کلی برای مدل‌سازی مسائل واقعی با یک و یا چند هدف استفاده می‌شود. این روش در برنامه‌ریزی تولید بسیار مفید است و نسبت‌های موجودی به فروش و ستانده به نیروی کار، نمونه‌هایی از اهداف کسری در برنامه‌ریزی تولید می‌باشند.

گیلمر و گموری، برنامه‌ریزی کسری را در صنعت کاغذ به کار گرفتند و نشان دادند که حداقل‌سازی نسبت ضایعات به میزان استفاده از مواد خام، مهمتر از حداقل‌سازی میزان ضایعات است. بر خلاف اغلب مدل‌های ریاضی برنامه‌ریزی تولید که هدف آنها حداکثرسازی سود، حداقل‌کردن هزینه و ... می‌باشد، برنامه‌ریزی کسری مدیران را قادر می‌سازد تا با در نظرگرفتن تأثیر همزمان چندین تابع هدف به محاسبه‌ی بهره‌وری و کارایی سازمان بپردازند [۱۳] و به عبارتی دیگر مهمترین دلیل استفاده از این روش آن است که توابع هدف کسری، در هرشرایطی اعم از قطعیت و عدم قطعیت، شاخص‌های مهم عملکردی محسوب می‌شوند.[۱۸]

در اواسط دهه‌ی ۱۹۶۰ و اوایل دهه ۱۹۷۰، در ابتدا مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه به مسئله برنامه‌ریزی کسری یک‌هدفه، تبدیل و سپس با استفاده از روش چارنز - کوپر[1] و یا بیتران - نوائس[2] حل می‌گردید.[۹] این تبدیل، مشکلات محاسباتی فراوانی داشت؛[۱۱,۱۵] برای غلبه بر مشکلات محاسباتی این تبدیل، تئوری مجموعه‌های فازی در حوزه‌ی برنامه‌ریزی کسری به کار گرفته شد. لوهاندجولا در سال ۱۹۸۴ مدلی جهت حل مسائل برنامه‌ریزی کسری چندهدفه ارائه داد که در آن از متغیرهای زبانی ارائه‌شده به‌وسیله‌ی زاده[3] استفاده کرد تا بدین‌طریق، آرمان‌های زبانی تصمیم‌گیرنده را در حل برنامه‌ریزی کسری چندهدفی به کار گیرد.[۸]

از یک طرف با وجود اینکه تلاش‌های زیادی در زمینه‌ی برنامه‌ریزی تولید انجام گرفته و علی‌رغم مزایای بسیار زیاد مدل‌های کسری، کمتر در مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی تولید از این روش استفاده شده است. از طرف دیگر، اغلب برای حل مدل‌های ریاضی کسری برنامه‌ریزی تولید، مدل‌های قدیمی که دارای مشکلات زیادی در تبدیل و محاسبات می‌باشند، به‌کارگرفته می‌شوند. [۱۱,۱۵] در این تحقیق سعی گردید تا مدل ریاضی کسری برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا (وابسته به شرکت بازار مبل خاورمیانه) طراحی شود و سپس از تئوری مجموعه‌های فازی برای حل آن استفاده شد. به گونه‌ای که شرکت‌های تولیدی چوب و فلز با اندکی تغییر بتوانند برای برنامه‌ریزی تولید شرکت خود از آن استفاده کنند.

1- Charnes and Cooper
2- Bitran and Novaes
3- Zade

مبانی نظری

برنامه‌ریزی تولید

تولید به معنای هرگونه فعالیت برای ارایه خدمات یا افزایش ارزش اشیاء مادی است.[۱] می‌توان گفت به اندازه تعداد نویسندگان مباحث تولید، تعاریف متفاوت در مورد برنامه‌ریزی تولید وجود دارد.[۳] برنامه‌ریزی تولید به معنای فرآیند تصمیم‌گیری در خصوص منابعی است که سازمان برای عملیات تولید آینده‌اش به آنها نیاز دارد و نیز تخصیص این منابع برای تولید محصول مورد نظر به تعداد مورد نیاز و با کمترین هزینه ممکن و با توجه به مشخصات کیفی ضروری می‌باشد[۵,۱۲,۱۹] در تعریف دیگری برنامه‌ریزی تولید جامع، فعالیت میان مدتی شامل زمانی بین ۲ تا ۱۸ ماه می‌باشد. در برنامه‌ریزی جامع، فرد تصمیمات خود را با توجه به میزان تقاضا و تولید، سطوح نیروی کار و تغییرات آن، سطوح موجودی مواد اولیه و کالای تولید شده و تغییرات آنها و نیز قراردادهای جانبی برای بهینه‌سازی برنامه تولید اتخاذ می‌کند.[۲۰] شرودر[1] هدف برنامه جامع را تعیین میزان تولید محصولات نهایی نزدیک به سطح تقاضای پیش‌بینی شده آینده می‌داند.[۱۶] قابل ذکر است که مدل‌های ریاضی متعددی برای انواع خطوط تولید ارائه شده است.[۱۰,۱۴,۱۷]

برنامه‌ریزی ریاضی کسری چندهدفی با رویکرد فازی

برنامه ریزی ریاضی کسری، یکی از انواع برنامه‌ریزی ریاضی است که از اهمیت زیادی برخوردار است.[۱۳] این نوع برنامه‌ریزی در زمینه‌های مختلف اقتصاد، بودجه‌ریزی، صنعت و ...کاربرد دارد. از آن جهت این برنامه‌ها، کسری خوانده می‌شوند که تابع هدف به‌صورت کسری یا نسبت دو تابع است که این توابع می‌توانند توابعی خطی یا غیرخطی از متغیرهای تصمیم مسئله باشند. برنامه‌ریزی کسری به دو طبقه‌ی کلی شامل یک هدفی و چند هدفی تقسیم می‌شود. روشهای

1- Schroeder

چارنز و کوپر و الگوریتم گیلمر و گموری برای حل مدل‌های کسری یک هدفی قابل کاربرد می‌باشند و از روش‌های مورد استفاده در حل مسائل برنامه‌ریزی کسری چند هدفی می‌توان به روش اهداف محصور شده، روش لکسیکوگرافیک و برنامه‌ریزی آرمانی اشاره کرد. اغلب در مسائل واقعی جهان، چندین هدف مطرح است که بهینه کردن آنها همزمان با هم مدّ نظر است. اما به دلیل آنکه معمولاً با تضاد بین اهداف مختلف نمی‌توان جوابی به‌دست آورد که تمام اهداف را بهینه کند روش‌های مختلفی به‌وجود آمده تا جوابی به‌دست آوریم که تا حد ممکن توابع هدف به مقادیر بهینه نزدیک باشند.[۶] از جمله‌ی این روش‌ها، استفاده از تئوری مجموعه‌های فازی است. عمده‌ترین روش‌های فازی که برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری چندهدفی فازی ارائه شده است می‌توان به مدل لوهاندجولا و مدل تصحیحی دووتا و همکارانش، مدل راوی و ردی، مدل چاکرابرتی و ساندیپن گوپتا مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی پال و همکارانش اشاره کرد. در این قسمت به دلیل استفاده از دو روش فازی دووتا و پال تنها به توضیح مختصری از این دو روش پرداخته خواهد شد.

مدل لوهاندجولا و مدل تصحیحی دووتا و همکارانش

در سال ۱۹۸۴، لوهاندجولا از رویکرد فازی برای حل مدل‌های کسری خطی چندهدفی استفاده کرد. او متغیرهای زبانی ایجادشده توسط لطفی‌زاده را به کار گرفت تا بدین طریق آرمان‌ها و نظرات تصمیم‌گیرنده/کاربر را در حل MOLFPP[1] به کارگیرد. وی پس از دریافت نظر تصمیم‌گیرنده و ساختاربندی متغیرهای زبانی و تبدیل مسئله‌ی اصلی به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، از تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی فازی برای دستیابی به یک راه‌حل رضایت‌بخش و کارا استفاده کرد.[۸] یکی از نقاط ضعف روش لوهاندجولا، تابع عضویتی است که با یک عامل جبرانی به‌دست آمده و کارایی راه‌حل بهینه را ضمانت نخواهد کرد. این نقطه ضعف به علت آن است که در تبدیل MOLFPP به MOLFPP ارتباط میان منطقه‌ی موجه این دو مسئله‌ی اصلی و تبدیلی از بین می‌رود. بنابراین منطقه‌ی موجه مسئله‌ی اصلی

1- Multi Objective Linear Fractional Programming Problem

و مسئله‌ی تبدیلی با یکدیگر فرق می‌کند.[۸] دووتا و همکارانش در سال ۱۹۹۲ مسئله لوهاندجولا را مورد بررسی قرار داده و برخی از نواقص آن را بیان کرده و به ارائه‌ی روشی برای رفع این نواقص و دستیابی به یک راه‌حل کارا نموده‌اند.

دووتا و همکارانش جهت حل این مشکل، رهیافت زبانی مورد استفاده در روش لوهاندجولا در حل مسئله را اصلاح کردند. آنها در ابتدا توابع عضویت را از طریق ترکیب آرمان‌های زبانی[۱] با توابع هدف به دست آوردند و سپس مدل وزن‌دهی ساده‌ی فزاینده[۲] را برای حل مدل حداکثرسازی صورت و حداقل‌سازی مخرج پیشنهاد دادند.

مراحل مدل

گام ۱: در اینجا فرض بر این است که مخرج کسرها در ناحیه‌ی امکان‌پذیر مثبت است. با این فرض دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول این است که تابع صورت کسر نیز در ناحیه‌ی امکان‌پذیر مثبت باشد که در این حالت اگر در قالب محدودیت‌های مسئله بتوانیم صورت کسر را حداکثر و مخرج آن را هم‌زمان حداقل کنیم، نقطه‌ای با این شرایط، کسر مورد نظر را حداکثر خواهد کرد. پس در مرحله‌ی اول توابع صورت و مخرج را به ترتیب در ناحیه‌ی امکان‌پذیر به‌طور مستقل حداکثر و حداقل می‌کنیم و همان‌طور که در روابط (۱) و (۲) مشخص شده است، مقادیر حداکثر و حداقل به‌دست آمده را $N_i(x)$ و $D_i(x)$ می‌نامیم.

$$N_i^0 = \underset{x\in X}{Max} N_i(x) \quad where\ N_i(x) = a^i x + b_i, \qquad (۱)$$

$$D_i^0 = \underset{x\in X}{Min} D_i(x) \quad where\ D_i(x) = c^i x + d_i. \qquad (۲)$$

در حالت دوم تابع صورت کسر در ناحیه‌ی امکان‌پذیر منفی است. در این‌صورت اگر در قالب محدودیت‌های مسئله بتوانیم صورت کسر را حداکثر و مخرج آن را هم‌زمان حداکثر کنیم، نقطه‌ای با این شرایط، کسر مورد نظر را حداکثر خواهد کرد. در مرحله‌ی اول این حالت نیز توابع صورت و مخرج را به‌طور مستقل در ناحیه‌ی

1- Linguistic aspiration
2- Sample Additive Waiting

امکان‌پذیر حداکثر می‌کنیم و مقادیر حداکثر به‌دست آمده را به ترتیب، N_i° و D_i° می‌نامیم.

گام ۲: با تعریف حدود مرزی p_i برای متغیر زبانی « نزدیک بودن $N_i(x)$ به N_i°» و S_iبرای متغیر زبانی «نزدیک بودن $D_i(x)$ به D_i° » توابع عضویت زیر را برای هر کدام از $N_i(x)$ و $D_i(x)$ تعریف می‌کنیم؛

$$\mu_j^{N_i} = \begin{cases} 0 & if \quad N_i(x) < p_i^j, \\ \dfrac{N_i(x) - p_i^j}{N_i^0 - p_i^j} & if \quad p_i^j \le N_i(x) \le N_i^0, \\ 0 & if \quad N_i(x) > N_i^0. \end{cases} \quad (۳)$$

$$\mu_j^{D_i} = \begin{cases} 0 & if \quad D_i(x) > S_i^j, \\ \dfrac{S_i^j - D_i(x)}{S_i^j - D_i^0} & if \quad D_i^0 \le D_i(x) \le S_i^j, \\ 0 & if \quad D_i(x) < D_i^0. \end{cases} \quad (۴)$$

گام ۳: حال می‌توان بر اساس روابط (۳) و (۴) مسئله‌ی اصلی را به‌صورت مسئله‌ی معادل زیر تبدیل کرد. تابع هدف این مسئله ترکیب خطی از کلیه عضویت‌های تعریف‌شده در مرحله‌ی قبل می‌باشد.

$$\begin{aligned} &Max\ \ v(\mu) = \sum \left(w_i \mu_i^{N_i} + w_i' \mu_i^{D_i} \right) \\ &s.t: \quad AX \le b,\ 0 \le \mu_i^{N_i} \le 1\ ,\ 0 \le \mu_i^{D_i} \le 1\ ,\ i = 1,2,\dots,k \\ &X \ge 0\ ,\ \ \sum_{i=1}^{K} \left(w_i + w_i' \right) = 1 \end{aligned} \quad (۵)$$

w_1 و w_2 در رابطه (۵) هر دو مثبت بوده و نشان‌گر اهمیت نسبی مدنظر تصمیم-گیرنده است. در هر حال مسئله معادل به‌دست‌آمده یک برنامه‌ی خطی ساده است که آن را می‌توان به روش سیمپلکس حل کرد.

مدل پال و همکاران

در سال ۲۰۰۳ پال و همکارانش از برنامه‌ریزی آرمانی، برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه‌ی فازی استفاده کردند. در میان روش‌هایی که

تاکنون برای حل MOLFPP به کار گرفته شده است GP[1] یک ابزار نیرومند در حل مسائل برنامه‌ریزی کسری چندهدفه به‌حساب می‌آید.[۱۵] در این روش، ابتدا اهداف کسری با اختصاص یک سطح آرمانی[2] به اهداف فازی تبدیل شده سپس سعی می‌شود تا بالاترین ارزش عضویت ممکن برای هریک از اهداف فازی ایجاد شده حاصل گردد. به عبارتی دیگر، در فرآیند حل، متغیرهای انحرافی بالا و پایین توابع عضویت مربوط به اهداف فازی، مدل پیشنهادی آنها را به یک مدل LGP معادل تبدیل می کند.

مرحله ۱. مدل‌سازی مسئله

فرم عمومی برنامه‌ریزی ریاضی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$optimize Z_k(X)=\frac{c_k X+\alpha_k}{d_k X+\beta_k},\quad k=1,2,\dots,K$$

$$subject\,to:\ X\in S=\left\{X\in R^n \mid AX\begin{pmatrix}\le\\=\\\ge\end{pmatrix}b, X\ge 0, b\in R^m\right\}, S\ne\varphi, c_k, d_k\in R^n;$$

فرض کنید: $d_k X+\beta_k>0,\ \forall X\in S'$.

در صورت ترکیب سطوح آرمانی با هر یک از اهداف مربوطه، اهداف به آرمان‌های فازی تبدیل خواهند شد.

فرض کنید سطح آرمانی اختصاص یافته به Kامین هدف $(Z_k(x))$ برابر با g_k باشد، آن گاه آرمان‌های فازی عبارتند از:

(a) $Z_k(X)\gtrsim g_k$ (for maximizing $Z_k(X)$);

(b) $Z_k(X)\lesssim g_k$ (for minimizing $Z_k(X)$).

اکنون آرمان‌های فازی با توابع عضویت مرتبط می‌شوند. تابع عضویت μ_k برای Kامین آرمان فازی $Z_k \gtrless g_k$ بر طبق مدل رائو و همکارانش به صورت زیر به‌دست می‌آید:

1- Goal Programming

2- Aspiration Level

$$\mu_k(X)=\begin{cases} 1 & \text{if } Z_k(X)\geq g_k, \\ \dfrac{Z_k(X)-l_k}{g_k-l_k} & \text{if } l_k\leq Z_k(X)\leq g_k, \\ 0 & \text{if } Z_k(X)\leq l_k \end{cases} \qquad (۶)$$

که در رابطه (۶)، l_k حد پایین K امین آرمان فازی می‌باشد.

از طرف دیگر، تابع عضویت μ_k برای K امین آرمان فازی $Z_k(X) \precsim g_k$ به صورت زیر است:

$$\mu_k(X)=\begin{cases} 1 & \text{if } Z_k(X)\leq g_k, \\ \dfrac{u_k-Z_k(X)}{u_k-g_k} & \text{if } g_k\leq Z_k(X)\leq u_k, \\ 0 & \text{if } Z_k(X)\geq u_k \end{cases} \qquad (۷)$$

که در رابطه (۷)، u_k حد پایین است.

مرحله‌ی ۲. مدل‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی

در روش‌های برنامه‌ریزی فازی، بالاترین درجه تابع عضویت یک است. بنابراین آرمان‌های عضویت منعطف مربوط به توابع عضویت بالا با سطح آرمانی یک عبارتند از:

$$\frac{Z_k(X)-l_k}{g_k-l_k}+d_k^- -d_k^+ =1,$$
$$\frac{u_k-Z_k(X)}{u_k-g_k}+d_k^- -d_k^+ =1.$$

که در آن:

$d_k^- \geq 0,\ d_k^+ \geq 0$ انحرافات بالا و پایین از سطوح آرمانی را بیان می‌کنند و $d_k^- . d_k^+ = 0$.

مرحله‌ی ۳. خطی‌سازی آرمان‌های عضویت

آرمان عضویت K ام را می‌توان به صورت زیر تبدیل نمود:

$$L_kZ_k(X)-L_kl_k+d_k^- -d_k^+ =1, \text{ where } L_k=\frac{1}{g_k-l_k}$$

در ادامه خواهیم داشت:

$$L_k\left(c_kX+\alpha_k\right)+d_k^-\left(d_kX+\beta_k\right)-d_k^+\left(d_kX+\beta_k\right)=L'_k\left(d_kX+\beta_k\right)$$

که: $L'_k=1+L_kl_k$

$$C_kX+d_k^-\left(d_kX+\beta_k\right)-d_k^+\left(d_kX+\beta_k\right)=G_k,$$

که:

$$C_k=L_kc_k-L'_kd_k\ ,\ \ G_k=L'_k\beta_k-L_k\alpha_k.$$

حال با روش تغییر متغیر که توسط کرن بلوث و استیور ارائه گردید، می‌توان آرمان فوق را به صورت زیر خطی‌سازی کرد:

فرض کنید: $D_k^+=d_k^+\left(d_kX+\beta_k\right),\ D_k^-=d_k^-\left(d_kX+\beta_k\right)$

در نتیجه داریم: $C_kX+D_k^--D_k^+=G_k$

از آنجایی که: $d_kX+\beta_k>0, d_k^-, d_k^+\geq 0$

داریم: $D_k^-, D_k^+\geq 0\ \ , D_k^-\ D_k^+=0$

در تصمیم‌گیری، حداقل‌سازی d_k^- به معنی حداقل‌سازی $D_k^-/\left(d_kX+\beta_k\right)$ می‌باشد، از این‌رو در هنگامی که آرمان عضویت کاملاً محقق گردد، $d_k^-=0$ و موقعی که موفقیت در تحقق آرمان، صفر باشد $d_k^-=1$ می‌باشد.

از آنجایی که $d_k^-\leq 1$، محدودیت زیر به مدل اضافه خواهد گردید:

$$\frac{D_k^-}{d_kX+\beta_k}\leq 1$$

یعنی داریم: $-d_kX+D_k^-\leq\beta_k$

از این‌رو مدل برنامه‌ریزی آرمانی مسئله‌ی فوق را می‌توان به صورت رابطه (۸) نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Find } X \textit{ so as to}\\
&\textit{Minimize} \quad Z=\sum_{k=1}^{K} w_k^- D_k^-\\
&\textit{and satisfy} \quad C_k X + D_k^- - D_k^+ = G_k\\
&\textit{subject to} \;\; AX \begin{pmatrix}\le\\=\\\ge\end{pmatrix} b\\
&\textit{and} \qquad -d_k X + D_k^- \le \beta_k,\\
&\qquad\qquad X\ge 0,\;\; D_k^-, D_k^+ \ge 0,\; k=1,2,\ldots,K.
\end{aligned} \tag{۸}
$$

در این مدل، Z همان تابع عضویت فازی است که دربرگیرنده‌ی متغیرهای موزون با انحراف منفی از مقادیر آرمانی می‌باشد. در این روش، وزن هر یک از آرمان‌ها بیانگر اهمیت نسبی تحقق سطح آرمانی آرمان مربوطه می‌باشد.
برای محاسبه‌ی وزن هر یک از آرمان‌ها می‌توان از روش پیشنهادی محمد به صورت رابطه‌ی (۹)، استفاده نمود:[۱۵]

$$
w_k^- = \begin{cases} \dfrac{1}{g_k - l_k} & \textit{for} \max \textit{functiom} \\ \dfrac{1}{u_k - g_k} & \textit{for} \min \textit{functiom} \end{cases} \tag{۹}
$$

روش تحقیق

روش مورد استفاده در این تحقیق، روش تجربی ـ ریاضی است. در این تحقیق برای جمع‌آوری داده‌های مربوط به سود، هزینه، ظرفیت تولید، میزان تقاضا و میزان موجودی انبار از روش مصاحبه و برای مدل‌سازی سیستم تولیدی شرکت مورد مطالعه از مطالعه‌ی میدانی استفاده گردید. به‌طور کلی جهت استفاده از مدل‌های تحقیق در عملیات معمولاً برداشتن شش گام تعریف مسئله، طبقه‌بندی مسئله، مدل-سازی یا فرموله کردن مسئله، حل مدل، تحلیل حساسیت و اعتبار مدل و اجرای مدل ضروری است.[۱] پژوهش حاضر نیز از این امر مستثنی نبوده و شامل تمامی مراحل فوق می‌باشد.

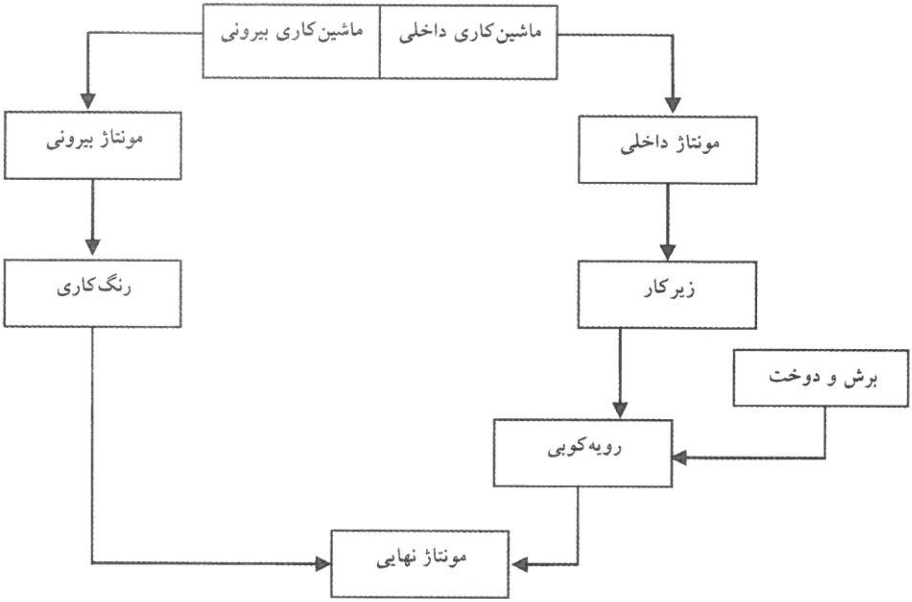
سیستم تولیدی چوب و فلز در یک نگاه

عمده‌ترین مواد اولیه‌ی صنعت چوب و فلز عبارتند از: الوار، تخته، خرده‌بینه، پارچه و ... . فرآیندهای تولیدی این صنعت برای شرکت مبل خاورمیانه به‌صورت خلاصه در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۱. فرآیندهای تولیدی شرکت مبل خاورمیانه

ردیف	فرآیند (واحد)	هدف	محصول (خروجی)	واحد بعدی
۱	ماشین‌کاری داخلی	گونیاکردن چوب، برش در اندازه‌های طولی مورد نیاز، برش در بعدهای مورد نیاز، فارسی کردن تکه‌های چوب، سوراخ‌کردن و دوبل زدن تکه‌ها، پاسنگ کردن، پرداخت و فرزکاری.	تکه‌های چوبی داخلی مبل	مونتاژ داخلی
۲	مونتاژ داخلی	فرزکاری (ابزار زدن) و پرداخت ظریف‌کاری قطعات داخلی مبل، مونتاژ قطعات داخلی مبل	کلافه داخلی	زیرکار
۳	زیرکار	خردکردن ابر و پنبه، ابرکشی	کلافه‌ی درونی ابرکشی شده	رویه‌کوبی
٤	رویه‌کوبی	فنرکشی و روکشی مبل	بخش داخلی مبل	مونتاژ نهایی
۵	برش و دوخت	برش پارچه در اندازه‌های مورد نیاز، دوخت پارچه در فرم-های موردنیاز	روکش مبل	رویه‌کوبی
٦	ماشین‌کاری بیرونی	گونیا کردن چوب، برش در اندازه‌های طولی مورد نیاز، برش در بعدهای مورد نیاز، فارسی کردن تکه‌های چوب، سوراخ‌کردن و دوبل زدن تکه‌ها، پاسنگ کردن، پرداخت و فرزکاری.	تکه‌های چوبی بیرونی مبل	مونتاژ بیرونی
۷	مونتاژ بیرونی	میخ‌زدن گوشه‌های بیرونی، پاسنگ کردن گوشه‌های بیرونی، مونتاژ قطعات بیرونی مبل.	کلافه بیرونی	رنگ‌کاری
۸	رنگ‌کاری	رنگ‌کاری قطعات بیرونی مبل	بخش بیرونی مبل	مونتاژ نهایی
۹	مونتاژ نهایی	مونتاژ قطعات درونی و برونی مبل، آماده کردن کالای تولیدی جهت بارگیری	انواع مبل	بارگیری و فروش

همچنین، می‌توان فرآیند تولیدی صنعت چوب و فلز را به صورت نمودار یک نشان داد.



نمودار ۱. مراحل تولیدی صنعت چوب و فلز

مدل‌سازی

پس از آشنایی با مراحل تولیدی شرکت چوفا، اکنون به معرفی مدل ریاضی برنامه‌ریزی تولید این شرکت خواهیم پرداخت. جهت سهولت در امر مدل‌سازی برنامه‌ریزی تولید این شرکت، هر کدام از مراحل تولیدی فوق به عنوان یک کارگاه تولیدی در نظر گرفته شده است. در مدل برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا، باید ماهیت تقدّم و تأخّر مراحل تولیدی و ارتباط یک به یک یا چند به یک بین کلیه یا بعضی از واحدها و فعالیت‌های تولیدی مورد توجه قرار گیرد. لذا مدل مناسب جهت برنامه‌ریزی تولید در این نوع سیستم‌ها، یک مدل برنامه‌ریزی چندمرحله‌ای، چندمحصولی می‌باشد.

مفروضات مدل

فرضیاتی که مدل ریاضی کسری برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا بر اساس آنها طراحی شده، به شرح زیر است:

- مدل برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا یک مدل چند محصولی است.
- مدل برنامه‌ریزی تولید برای دوره‌های روزانه و در مجموع برای یک دوره‌ی زمانی ۲ ماهه طراحی شده است.
- موجودی ابتدای دوره‌ی برنامه‌ریزی تولید برای ۱۰ نوع مبل در تمامی کارگاه‌ها (به جز کارگاه ۹)، مجموعاً برابر ۸۰ در نظر گرفته شده است.
- به دلیل آنکه در هر کارگاه، تولید بر حسب مبلمان انجام می گیرد، یعنی در صورت تولید مبل، اجزای مورد نیاز برای یک‌دست مبل تولید می‌شود، واحد کلیه متغیرها و پارامترهای مدل برحسب یک‌دست مبل در روز در نظر گرفته شده است.

لازم به ذکر است که به جز کارگاه‌های ۱ و ۵ و ۶، هر کدام از کارگاه‌ها ورودی خود را از خروجی واحد دیگر دریافت می کنند و با انجام عملیات دیگری بر روی مبل به کارگاه دیگر تحویل می‌دهند.

در ادامه، اجزای مختلف مدل ریاضی کسری برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا (مبل خاورمیانه)، شامل متغیرهای تصمیم، محدودیت‌ها، پارامترها و توابع هدف مدل معرفی خواهد شد.

مشخصه‌های متغیّرهای تصمیم

جدول ۲. مشخصه‌های متغیرهای تصمیم

ردیف	اندیس	شرح
۱	$i=1,2,\ldots,9$	تعداد کارگاه‌های تولیدی و مونتاژ به کار گرفته شده در کارخانه یا سیستم های تولیدی مختلف
۲	$K=1,2,\ldots,10$	نوع مبلمان تولیدی
۳	$T=1,2,\ldots,60$	دوره‌های (روزهای) تولیدی که برای آن برنامه‌ریزی می‌شود

متغیرهای تصمیم

در جدول ۳ متغیرهای تصمیم بر اساس مشخصه‌های تعریف‌شده آورده شده است.

جدول ۳. متغیرهای تصمیم

ردیف	متغیّر	شرح
۱	x_{ikt}	تعداد مبل نوع kام است که در دوره‌ی (روز) tام در کارگاه iام، بر روی آن عملیات انجام می‌شود
۲	I_{ikt}	موجودی پایان‌دوره مبلمان نوع kدر کارگاه ماشین‌کاری داخلی در دوره‌ی tام.
۳	D_k^{+}	$D_k^{+} = d_k^{+}\left(d_k X + \beta_k\right)$
٤	D_k^{-}	$D_k^{-} = d_k^{-}\left(d_k X + \beta_k\right)$

پارامترهای مدل

کلیه‌ی پارامترهای مدل از قبیل میزان ظرفیت کارگاه‌ها، میزان تقاضای هر یک از انواع مبلمان، میزان سود هر دست مبل، قیمت تمام‌شده تولید یک دست مبلمان و ... در جدول ۴ آورده شده است که در ادامه جهت حل مدل، در بخش داده‌های نرم‌افزار لینگو، میزان کمی آنها وارد و مدل حل می‌گردد.

جدول ٤. پارامترهای مدل

ردیف	پارامتر	شرح
۱	$Ccap_{it}$	مقدار حداکثر ظرفیت کارگاه iام در روز tام
۲	D_{km}	میزان حداقل تقاضای مبلمان آماده نوع در ماه m ام
۳	c_{kt}	میزان سود تولید یک‌دست مبلمان نوع kدر دوره‌ی t
٤	v_{kt}	قیمت تمام‌شده تولید یک دست مبلمان نوع k در دوره‌ی t
۵	f_o	مجموع هزینه‌ی ثابت سالن در طول دوره دو ماهه. (که در هر شرایطی مانع جلوگیری از صفر شدن مخرج کسر می‌شود)
٦	$I_{\circ}$	ذخیره‌ی اطمینان کارگاه‌ها برای تمام مبل‌ها
۷	g_i	سطح آرمانی اختصاص یافته به i امین هدف
۸	l_i	حد پایین i امین آرمان فازی
۹	p_i	متغیر زبانی نزدیکی $N_i(x)$ به N_i°,
۱۰	S_i	متغیر زبانی نزدیکی $D_i(x)$ به D_i°

محدودیت‌های سیستمی مدل

۴ دسته محدودیت برای مدل برنامه‌ریزی تولید در نظر گرفته شده است که در

جدول ۵ و ۶ آورده شده است. این محدودیت‌ها عبارت از محدودیت‌های مربوط به ظرفیت، محدودیت‌های مربوط به بالانس، محدودیت‌های مربوط به موجودی‌های پایان‌دوره و محدودیت‌های مربوط به برآوردن سفارش‌ها می‌باشد. لازم به‌ذکراست که محدویت‌های بالانس میان هر دو کارگاه با خطوط نقطه‌چین مشخص شده‌است.

جدول ۵. محدودیت‌های سیستمی مدل

ردیف	کارگاه	محدودیت ظرفیت	محدودیت بالانس
۱	ماشین‌کاری داخلی	$\sum_{k=1}^{K} x_{1kt} \le Ccap_{1t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{1kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{2kt} = I_{1kt}$ $x_{2kt} \le I_{1kt} + x_{1kt}$
۲	مونتاژ داخلی	$\sum_{k=1}^{K} x_{2kt} \le Ccap_{2t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{2kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{3kt} = I_{2kt}$ $x_{3kt} \le I_{2kt} + x_{2kt}$
۳	زیرکار	$\sum_{k=1}^{K} x_{3kt} \le Ccap_{3t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{3kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{4kt} = I_{3kt}$ $x_{4kt} \le I_{3kt} + x_{3kt}$
٤	رویه‌کوبی	$\sum_{k=1}^{K} x_{4kt} \le Ccap_{4t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{5kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{4kt} = I_{5kt}$ $x_{4kt} \le I_{5kt} + x_{5kt}$
۵	برش و دوخت	$\sum_{k=1}^{K} x_{5kt} \le Ccap_{5t}$	
٦	ماشین‌کاری بیرونی	$\sum_{k=1}^{K} x_{6kt} \le Ccap_{6t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{6kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{7kt} = I_{6kt}$ $x_{7kt} \le I_{6kt} + x_{6kt}$
۷	مونتاژ بیرونی	$\sum_{k=1}^{K} x_{7kt} \le Ccap_{7t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{7kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{8kt} = I_{7kt}$ $x_{8kt} \le I_{7kt} + x_{7kt}$
۸	رنگ‌کاری	$\sum_{k=1}^{K} x_{8kt} \le Ccap_{8t}$	

جدول ۶. محدودیت‌های کارگاه مونتاژ نهایی

ردیف	کارگاه	محدودیت ظرفیت	محدودیت تقاضا	محدودیت بالانس
۹	رویه‌کوبی			$\sum_{t=1}^{T} x_{4kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{9kt} = I_{4kt}$ $x_{9kt} \le I_{4kt} + x_{4kt}$
	مونتاژنهایی	$\sum_{k=1}^{K} x_{9kt} \le Ccap_{9t}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{9kt} \ge D_{km}$	
	رنگ‌کاری			$\sum_{t=1}^{T} x_{8kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{9kt} = I_{8kt}$ $x_{9kt} \le I_{8kt} + x_{8kt}$

لازم به ذکر است که در این مرحله کالاهای تولیدی به صورت روزانه بارگیری شده و به دفتر فروش آن در تهران منتقل می‌شود. از این رو موجودی پایان دوره برای کارگاه ۹ در روز t ام صفر در نظر گرفته شده است و همچنین با توجه به این که واحد متغیرها، تعداد مبلمان و از نوع عدد صحیح می‌باشند؛ از این رو داریم:

$$x_{ikt}, I_{ikt} \ge 0, \text{int} \qquad i=1,2,\ldots,9 \quad k=1,2,\ldots,10 \quad , \quad t=1,2,\ldots,60$$

توابع هدف مدل

هدف اصلی شرکت حداکثر کردن سود است و چون می‌خواهیم به‌صورت مفهوم بهره‌وری و بالا بردن بهره‌وری سالن بیان شود، آرمان را به‌صورت کسر زیر بیان می‌کنیم به‌طوری‌که در رابطه‌ی (۱۰)، صورت کسر، سود حاصل از مجموع تولیدات و مخرج کسر هزینه‌ی کل (قیمت تمام‌شده مجموع تولیدات + هزینه‌ی ثابت سالن تولید) می‌باشد.

$$Max Z_1(x) = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} c_{kt} x_{9kt}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} v_{kt} x_{9kt} + f_o} \qquad (۱۰)$$

علاوه بر این، هر یک از کارگاه‌ها دارای انبار مجزاً می‌باشد و اجزای تولیدی در هر یک، در گوشه‌ای از کارگاه بر روی هم چیده می‌شوند و با وجود گستردگی فضا، محدودیت ظرفیتی برای آنها در نظر گرفته نشده است. با توجه به این‌که انبار

بیش از حدّ کالاهای تولیدی، هزینه‌ی رکود سرمایه را به شرکت تحمیل می کند، کاهش میزان موجودی انبار دارای اهمیت بسزایی می‌باشد. از طرف دیگر به علت آنکه در مدل هیچ ضمانتی برای جلوگیری از تولید مازاد کارگاه‌های دیگر وجود ندارد امکان تولید اضافه، موجودی بالا و رکود سرمایه است؛ به علت عدم وجود اطلاعات دقیق مبنی بر هزینه‌ی رکود سرمایه، با به‌کارگیری رابطه‌ی (۱۱)، سعی بر آن است تا ضمن جلوگیری از افزایش تولید، میزان موجودی انبار کارگاه‌ها نیز کاهش یابد.

$$Max Z_2(x)=\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}x_{9kt}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}I_{ikt}+I_{\circ}} \qquad (۱۱)$$

طراحی مدل ریاضی خطی فازی برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا

در این قسمت سعی بر آن است تا با استفاده از دو مدل متفاوت پال و دووتا، مدل‌های ریاضی خطی فازی برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا حل و با یکدیگر مقایسه گردد تا بدین طریق امکان سنجش اعتبار مدل‌سازی و روش‌های به‌کارگرفته شده در حل آن فراهم شود.

خطی‌سازی مدل کسری بر اساس روش پال و همکارانش

در سال ۲۰۰۳ پال و همکارانش از برنامه‌ریزی آرمانی، برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه‌ی فازی استفاده کردند. در میان روش‌هایی که تاکنون برای حل MOLFPP به‌کارگرفته شده است، GP[1] یک ابزار نیرومند در حل مسائل MOLFPP به حساب می‌آید.[۱۵] در این روش، ابتدا اهداف کسری با اختصاص یک سطح آرمانی[2] به اهداف فازی تبدیل می‌شود، سپس سعی می‌شود تا بالاترین ارزش عضویت ممکن برای هریک از اهداف فازی ایجاد شده حاصل گردد. به عبارتی دیگر، در فرآیند حل، متغیرهای انحرافی بالا و پایین توابع عضویت

1- Goal Programming
2- Aspiration Level

مربوط به اهداف فازی، مدل پیشنهادی آنها را به یک مدل LGP معادل تبدیل می‌کند. از این رو، در ابتدا اهداف کسری را بر اساس روابط (۱۲) و (۱۳)، با اختصاص سطوح آرمانی g_i، به اهداف فازی (درجه‌ی عضویت) تبدیل می‌کنیم:

$$\mu_1 = \frac{\dfrac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} c_{kt}.x_{9kt}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} v_{kt}x_{9kt} + f_o} - l_1}{g_1 - l_1} \quad , \quad l_1 \le Z_1(x) \le g_1 \qquad (۱۲)$$

$$\mu_2 = \frac{\dfrac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} x_{9kt}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} I_{ikt} + I_\circ} - l_2}{g_2 - l_2} \quad l_2 \le Z_2(x) \le g_2 \quad , \qquad (۱۳)$$

در ادامه بر اساس رویکرد پال، اهداف فازی فوق را براساس روابط (۱۴) و (۱۵) به آرمان تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}(c_{kt}x_{9kt}) - g_1(\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} v_{kt}x_{9kt} + f_o) - D_1^{+} + D_1^{-} = 0 \qquad (۱۴)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} x_{9kt} - g_2\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} I_{ikt} + I_\circ\right) - D_2^{+} + D_2^{-} = 0 \qquad (۱۵)$$

بر اساس آنچه در بالا گفته شد، محدودیت‌های سیستمی شماره‌ی (۱۶) و شماره‌ی (۱۷) نیز به مدل اضافه خواهد شد:

$$-(g_1 - l_1)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} v_{kt}x_{5kt} + f_0) + D_1^{-} \le 0 \qquad (۱۶)$$

$$-(g_2 - l_2)(\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} I_{ikt} + I_\circ) + D_2^{-} \le 0 \qquad (۱۷)$$

با توجه به این‌که در این مدل به دنبال حداکثرسازی درجات عضویت هر دو هدف هستیم، مجموع موزون انحرافات منفی از هر دو درجه‌ی عضویت را حداقل می‌کنیم. بنابراین فرم عمومی مدل ریاضی فازی برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا بر اساس مدل پال و همکارانش به صورت جدول ۷ است.

خطی‌سازی مدل کسری بر اساس روش دووتا و همکارانش

در این مدل با در نظر گرفتن سطوح آرمانی و انحرافات مجاز توابع صورت و مخرج، درجات عضویت آنها به صورت جداگانه محاسبه می گردد و در ادامه با محاسبه‌ی وزن هر یک از اهداف، و حدکثرسازی مجموع موزون درجات عضویت اهداف، سعی می گردد تا بدین‌طریق توابع صورت حداکثر و توابع مخرج حداقل گردد.

از این رو، در ابتدا توابع صورت و مخرج را به‌طور مستقل در ناحیه‌ی امکان‌پذیر به‌صورت حداکثر و حداقل تبدیل می کنیم و مقادیر به‌دست‌آمده را به‌ترتیب، N_i° و D_i° می‌نامیم. در ادامه، درجات عضویت هر یک از توابع صورت و مخرج را محاسبه می کنیم. فرم عمومی مدل ریاضی فازی برنامه‌ریزی تولید شرکت چوفا بر اساس مدل دووتا و همکارانش به صورت جدول ۴ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در روش فازی دووتا، وزن هر یک از اهدافِ صورت و مخرج (w_i)، بر اساس نظر خبرگان به‌دست می‌آید.

جدول ۷. مدل ریاضی کسری فازی برنامه ریزی تولید در شرکت مبل خاورمیانه

روش فازی پال	روش فازی دووتا
$find\ X\ so\ as\ to:$ $Minimize\ Z = W_1^- D_1^- + W_2^- D_2^-$ $satisfy:$ $\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}(c_{kt}x_{9kt}) - g_1(\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}v_{kt}x_{9kt} + f_o) - D_1^+ + D_1^- = 0$ $\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}x_{9kt} - g_2\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}I_{ikt} + I_{\circ}\right) - D_2^+ + D_2^- = 0$ $subject\ to:$	$Maximize$ $v(\mu) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3 + w_4\mu_4$ $that:\ such$ $\sum_{t=1}^{T}x_{1kt} - \sum_{t=1}^{T}x_{2kt} = I_{1kt}$ $x_{2kt} \le I_{1kt} + x_{1kt}$ $\sum_{t=1}^{T}x_{6kt} - \sum_{t=1}^{T}x_{7kt} = I_{6kt}$ $x_{7kt} \le I_{6kt} + x_{6kt}$ $\sum_{t=1}^{T}x_{2kt} - \sum_{t=1}^{T}x_{3kt} = I_{2kt}$ $x_{3kt} \le I_{2kt} + x_{2kt}$

روش فازی پال	روش فازی دووتا
$\sum_{t=1}^{T} x_{1kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{2kt} = I_{1kt}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{3kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{4kt} = I_{3kt}$
$x_{2kt} \le I_{1kt} + x_{1kt}$	$x_{4kt} \le I_{3kt} + x_{3kt}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{6kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{7kt} = I_{6kt}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{5kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{4kt} = I_{5kt}$
$x_{7kt} \le I_{6kt} + x_{6kt}$	$x_{4kt} \le I_{5kt} + x_{5kt}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{2kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{3kt} = I_{2kt}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{4kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{9kt} = I_{4kt}$
$x_{3kt} \le I_{2kt} + x_{2kt}$	$x_{9kt} \le I_{4kt} + x_{4kt}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{3kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{4kt} = I_{3kt}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{7kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{8kt} = I_{7kt}$
$x_{4kt} \le I_{3kt} + x_{3kt}$	$x_{8kt} \le I_{7kt} + x_{7kt}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{5kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{4kt} = I_{5kt}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{8kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{9kt} = I_{8kt}$
$x_{4kt} \le I_{5kt} + x_{5kt}$	$x_{9kt} \le I_{8kt} + x_{8kt}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{4kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{9kt} = I_{4kt}$	$\sum_{t=1}^{T} x_{9kt} \ge D_{km}$
$x_{9kt} \le I_{4kt} + x_{4kt}$	$\sum_{k=1}^{K} x_{ikt} \le Ccap_{it}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{7kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{8kt} = I_{7kt}$	$\sum_{t=1}^{T} I_{9kt} = 0$
$x_{8kt} \le I_{7kt} + x_{7kt}$	$\mu_1 = \dfrac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} c_{kt} x_{kt} - p_1}{N_1^{\circ} - p_1}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{8kt} - \sum_{t=1}^{T} x_{9kt} = I_{8kt}$	$\mu_2 = \dfrac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} x_{kt} - p_2}{N_2^{\circ} - p_2}$
$x_{9kt} \le I_{8kt} + x_{8kt}$	$\mu_3 = \dfrac{S_1 - (\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} v_{kt} x_{kt} + f_{\circ})}{S_1 - D_1^{\circ}}$
$\sum_{t=1}^{T} x_{9kt} \ge D_{km}$	
$\sum_{k=1}^{K} x_{ikt} \le Ccap_{it}$	
$\sum_{t=1}^{T} I_{9kt} = 0$	
and	

روش فازی پال	روش فازی دووتا
$-(g_1-l_1)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} v_{kt}x_{5kt}+f_0)+D_1^- \le 0$ $-(g_2-l_2)(\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} I_{ikt}+I_\circ)+D_2^- \le 0$ $D_1^-, D_2^-, D_1^+, D_2^+ \ge 0$ $x_{ikt}, I_{ikt} \ge 0, \text{int} \quad k=1,2,...,10 \;,\; t=1,2,...,60 \;,\; m=1,2.$	$\mu_4=\dfrac{S_2-\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} I_{ikt}+I_\circ\right)}{S_2-D_2^\circ}$ $0\le \mu_i \le 1 \; X \ge 0,$ $i=1,2,3,4$

خروجی‌های مدل پال و دووتا

مدل پال شامل ۱۰۲۶۸ متغیر تصمیم (۱۰۲۰۰ متغیر آن عدد صحیح می‌باشد) و ۱۰۱۷۳ محدودیت می‌باشد؛ مدل دووتا نیز شامل ۱۰۲۶۸ متغیر تصمیم (۱۰۲۰۰ متغیر آن عدد صحیح می‌باشد) و ۱۰۷۷۷ محدودیت می‌باشد. هر دو مدل به‌وسیله نرم‌افزار لینگو حل گردید. مقادیر هر یک از اهداف در هر دو مدل، یکسان و نتایج آنها به شرح جدول ۸ آورده شده است.

جدول ۸. خروجی‌های مرتبط با مقادیر اهداف در دو روش پال و دووتا

متغیّر	سود (F_1)	هزینه (F_2)	میزان تولید (F_3)	موجودی (F_4)
ارزش (تومان)	0.6410434E+09	0.2377028E+10	6000.000	80.00000
مقادیر توابع هدف کسری	$\dfrac{F_1}{F_2}=.269$		$\dfrac{F_3}{F_4}=75$	
درجات عضویت توابع هدف کسری	$\mu_1=\dfrac{.269-.1}{.241}=.701$		$\mu_2=\dfrac{75-2.234}{72.766}=1$	

لازم به ذکر است که در شرکت مورد مطالعه، میزان سود و هزینه در ۲ ماهه گذشته به‌ترتیب برابر ۶۱۸۰۴۶۹۴۰ و ۲۴۱۸۴۹۱۵۰۰ می‌باشد. با توجه به نتایج به

دست آمده از مدل در می‌یابیم که سود شرکت به میزان ۲۲۹۹۶۴۶۰ افزایش داشته است و هزینه‌ی کل نیز به اندازه‌ی ۴۱۴۶۳۵۰۰ واحد کمتر شده است.

مقایسه‌ی مقادیر اهداف در دو مدل

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر دو مدل، مقادیر μ_1 و μ_2 یکسان است؛ از این رو می‌توان گفت که هر دو مدل به کارگرفته شده در حل مدل کسری، نتایج یکسانی دارد.

مقادیر متغیرها

نتایج مدل پال و دووتا برای کارگاه ۹ به صورت جداولی در ضمیمه آورده شده است. همان‌طور که در جداول، مشاهده می‌شود، مقادیر متغیرهای تصمیم در دو مدل، متفاوت هستند؛ از این رو می‌توان گفت که جواب بهینه‌ی مدل مربوط به شرکت مورد مطالعه از نوع بهینه‌ی چندگانه است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، علاوه بر مطالعات کتابخانه‌ای، صنعت چوب و فلز و شرایط حاکم بر تصمیم‌گیری در این صنعت نیز مورد مطالعه قرار گرفت. در این راستا یک مدل ریاضی، متناسب با فضای ساده و نیازهای واقعی طراحی شد، که به صورت یک سیستم برنامه‌ریزی تولید چند محصولی، چند مرحله‌ای و چند دوره‌ای می‌باشد. مدل ریاضی این تحقیق از نوع چندهدفه کسری است؛ از این رو با به‌کارگیری تئوری‌های فازی و دو روش فازی پال و دووتا برای حل مدل کسری چند هدفی، امکان غلبه بر مشکلات محاسباتی ناشی از تغییر متغیّر در روش‌های قبلی فراهم گردید. با توجه به این‌که با اجرای مداوم مدل توسط نرم‌افزار لینگو، جواب بهینه متفاوتی حاصل می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که جواب مدل از نوع بهینه چندگانه می‌باشد. قابل تأمّل است که نتایج مربوط به مقادیر اهداف در هر دو روش فازی پال و دووتا یکسان است و به علت این که مدل دارای حالت خاص بهینه چندگانه است

مقادیر متغیرهای تصمیم در دو روش با یکدیگر متفاوت می‌باشند. با به‌کارگیری این روش، مدیران ضمن دستیابی به اهداف چندگانه، خواهند توانست تا به برنامه‌ریزی تولید در شرکت خود به صورتی بپردازند که ترکیب تولید سبب تسهیل در رشد و بهره‌وری شود. لازم به ذکر است که مدیران سایر شرکت‌ها نیز خواهند توانست این مدل را با اندک تغییر، در راستای اهداف خویش به کار گیرند.

منابع و مآخذ

۱. آذر، عادل.(۱۳۸۶). **تحقیق در عملیات**. تهران: انتشارات سمت.

۲. عندلیب، نادر. (۱۳۸۳). **طراحی مدل ریاضی برنامه‌ریزی تولید (مورد: شرکت سیمان فارس - خوزستان)**. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت‌مدرس.

۳. مهرگان، محمدرضا؛ کاظمی‌امین عالیه و کامیاب مقدس، امین. (۱۳۸۵). **طراحی مدل آرمانی برنامه‌ریزی تولید برای شرکت کابل‌های مخابراتی شهید قندی یزد**. فصلنامه‌ی دانش مدیریت، سال ۱۹، شماره ۷۴، ۱۴۷-۱۳۳.

۴. میرفخرالدینی، حیدر. (۱۳۸۱). **طراحی مدل ریاضی کسری برنامه‌ریزی تولید (مورد مطالعه: صنعت نساجی)**. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس.

۵. ماکوئی، امین. (۱۳۸۳) **مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی تولید**، تهران، انتشارات دانش پرور.

6. Aköz O. Petrovic D. (2007). **A fuzzy goal programming method with imprecise goal hierarchy**. European Journal of Operational Research, 181(3), pp. 1427-1433.

7. Ammar E. (1998). **On some basic notions of fuzzy parametric nonsmooth multiobjective nonlinear fractional programming problems**. Fuzzy Sets and Systems, 99, pp. 291-30.

8. Chakraborty M, Gupta S. (2002). **Fuzzy mathematical programming for multiobjective linear fractional programming problem**. Fuzzy Sets and Systems, 125, pp. 335-342.

9. Charnes A, Cooper W W. (1996). **Management Models and Industrial Applications of Linear Programming**. Part 2, John Wiley and Sons, Newyork.

10. Chen L H, Tsai, F C. (2001). **Fuzzy goal programming with different importance and priorities**. European Journal of Operational Research, 133(3), pp. 548-556

11. Duran Toksar. (2008). **Taylor series approach to fuzzy multi objective linear fractional programming**. Information Sciences, 178, pp. 1189–1204

12. Kumar M, Vrat P, Shankar R. (2004). **A fuzzy goal programming approach for vendor selection problem in a supply chain**. Computers & Industrial Engineering, Vol. 46 No.1, pp. 69-85

13. Minasiana S, Bogdana Pop. (2003). **On a fuzzy set approach to solving multipleobjective linear fractional programming problem.** Fuzzy Sets and Systems, 34,pp. 397–405

14. Olhager J, Wikner J. (2000). **Production Planning and Control Tools**. Production Planning and Control, Vol 11, No3, PP. 210-222

15. Pal B N, Moitra U, Maulik. (2003). **A goal programming procedure for fuzzy multi objective linear fractional programming problem.** Fuzzy Sets and Systems, 139, pp. 395–405

16. Petrovic D, Akoz O. (2007). **A Fuzzy Goal Programming Approach to Integrated Loading and Scheduling of a Batch Processing Machine**. The Journal of Operational Research Society, pp. 1-9

17. Rao J R, Tiwari R N, Mohanty B K. (1988). **A preference structure on aspiration levels in a goal programming problem – a fuzzy approach**. Fuzzy Sets and Systems, 25, pp. 175–182.

18. Saad O. (2007). **On stability of proper efficient solutions in multiobjective fractional programming problems under fuzziness**. Mathematical and Computer Modelling, 45, pp. 221–231.

19. Tamiz, M. and Romer, C. (1998). **Goal Programming for Decision Making**. Interfaces. Vol. 12, pp. 42-52.

20. Tiwari RN, Dharmar S, Rao JR. (1987). **Fuzzy goal programming – an additive model**. Fuzzy Sets and Systems, 24, pp. 27–34.